U d'/of OTTAWA
39003006801244

Digitized by the Internet Archive
in 2011 with funding from
University of Toronto

http://www.archive.org/details/prcisdecalculg00leve

PRÉCIS

DE

CALCUL GÉOMÉTRIQUE

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie,
59998 Quai des Grands-Augustins, 55.

PRÉCIS

DE

CALCUL GÉOMÉTRIQUE

PAR

R. LEVEUGLE,

LIEUTENANT-COLONEL DU GÉNIE.

AVEC UNE PRÉFACE DE M. H. FEHR,

Doyen de la Faculté des Sciences de Genève.

PARIS

GAUTHIER-VILLARS ET Cie ÉDITEURS

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55.

1920

UNIVERSITAS SCIENTIAE

QA
261
.L49P
1920

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés
pour tous pays.

PRÉFACE DE M. H. FEHR.

Tous ceux qui ont eu à s'occuper de Géométrie vectorielle ont été frappés par l'élégance et la simplicité de la méthode. Mathématiciens et Techniciens y trouvent un instrument singulièrement précieux pour résoudre de nombreux problèmes de Mécanique, de Physique et d'Électrotechnique. La supériorité des notations vectorielles sur les procédés de la Géométrie analytique ne peut guère être niée et ne résulte pas seulement de leur brièveté. L'Analyse ne met pas toujours suffisamment en lumière le sens géométrique des propriétés qu'elle étudie; au contraire, la méthode vectorielle réalise un double bénéfice, celui de simplifier considérablement l'écriture, et de resserrer le lien qui existe entre les propriétés synthétiques et analytiques. Algébriques par leurs symboles, les transformations du calcul vectoriel ont une signification géométrique intuitive qui permet d'interpréter constamment les opérations et leurs résultats.

Ces avantages expliquent la place toujours plus grande que les auteurs accordent aux méthodes de Grassmann, d'Hamilton et de leurs nombreux disciples. Les progrès réalisés dans ce domaine entraînent des besoins nouveaux dont on n'a guère tenu compte jusqu'ici dans l'enseignement élémentaire. Et l'on peut s'étonner de l'absence des notions de Géométrie vectorielle dans les programmes de mathématiques destinés aux Physiciens et aux Techniciens. Il suffirait cependant de quelques notions, rattachées au cours de Géométrie analytique, pour donner l'initiation permettant d'aborder les monographies spéciales ainsi que la lecture des mémoires et traités faisant usage des méthodes vectorielles. On connaît les efforts faits de ce côté en France, il y a plus de 25 ans, par M. Carvallo dans ses conférences de l'École Polytechnique.

M. R. Leveugle a été frappé, lui aussi, de l'ignorance dans laquelle se trouvent les géomètres et les physiciens en matière de Géométrie vectorielle, malgré les grands secours que cette théorie est susceptible de leur prêter tant pour la recherche que comme, moyen d'expression. Il s'est proposé de remédier à ce déficit et a su utiliser à cet effet les rudes et longues heures de sa captivité en Allemagne. Il en a rapporté un Ouvrage élémentaire limité à l'essentiel, aux questions qui forment la substance de la Géométrie vectorielle, y compris les applications pratiques. Les nombreux problèmes et exercices qui illustrent son exposé familiariseront le lecteur avec la méthode vectorielle et lui laisseront aussi entrevoir la portée considérable de la nouvelle analyse qui s'applique d'une manière remarquable aux domaines les plus divers des mathématiques pures et appliquées.

Au moment où les Sciences techniques vont prendre un nouvel essor, le présent Ouvrage est appelé à rendre de nombreux services. Je ne doute pas qu'il ne rencontre tout le succès que je lui souhaite.

En terminant, je tiens à remercier le Lieutenant-Colonel Leveugle de l'aimable insistance avec laquelle il a voulu inscrire mon nom, à côté du sien, en tête de cet Ouvrage. Je dois sans doute cet honneur, auquel je suis très sensible, au souvenir que l'auteur a conservé de nos brèves relations épistolaires lors de sa captivité en Allemagne, et, plus tard, pendant son internement en Suisse. Qu'il me permette de saisir l'occasion qui m'est offerte pour lui exprimer les sentiments d'admiration que m'inspirent l'énergie et la persévérance dont il a fait preuve en rédigeant ce Livre au milieu de conditions particulièrement difficiles.

Genève, 30 décembre 1918.

H. Fehr.

PRÉFACE DE L'AUTEUR.

La première idée d'un Calcul géométrique, c'est-à-dire d'une méthode d'Algèbre générale qui permette de faire entrer directement dans le Calcul les éléments géométriques des figures, sans l'aide de nombres étrangers à la question que l'on a en vue, tels que les coordonnées cartésiennes ou autres, semble due à *Leibniz*. C'est dans une lettre de Leibniz à Huygens en date du 8 septembre 1679 que ce penseur parle de son projet dans les termes suivants : « Je ne suis pas encore content de l'Algèbre, en ce qu'elle ne donne ni les plus courtes voies, ni les plus belles constructions de la Géométrie. C'est pourquoi lorsqu'il s'agit de cela, je crois qu'il nous faut encore une autre analyse proprement géométrique ou linéaire qui nous exprime directement *Situm*, comme l'Algèbre exprime *magnitudinem*. » Il envoyait en même temps à Huygens un « *Essay* » contenant le développement de ses idées sur une « *Nouvelle Caractéristique* ». Cet « Essay » a été réimprimé dans le premier volume des *Œuvres de Grassmann*, qui contient l'*Ausdehnungslehre* de 1844.

Leibniz ne paraît pas d'ailleurs avoir poussé plus loin le développement de cette idée devenue plus tard si féconde, et à un moment où la nouvelle Analyse, alors à son début, attirait l'attention de tous les mathématiciens, son idée ne fut pas remarquée.

Il faut attendre le commencement du siècle dernier pour rencontrer de nouveaux chercheurs sur la voie à peine indiquée. L'orientation de ces nouvelles recherches ne fut d'ailleurs nullement suggérée par l'idée de Leibniz, bien qu'il puisse peut-être résulter des écrits de Grassmann que celui-ci y ait puisé la *pensée* de travailler dans ce

sens. De sorte qu'il faut considérer Leibniz comme ayant pressenti plutôt qu'indiqué le chemin que l'on devait suivre.

Le premier pas dans cette direction fut fait par *Argand*, qui donnait en 1806 dans un opuscule intitulé « Essai sur une manière de représenter les quantités géométriques », réédité en 1874 par *J. Houël*, chez Gauthier-Villars, la construction bien connue de l'imaginaire $x + y\sqrt{-1}$, à laquelle les travaux de *Cauchy* ont donné une importance décisive et qui est maintenant entrée dans le domaine de l'enseignement élémentaire. Argand regarde une expression telle que $x + y\sqrt{-1}$, comme représentée par la droite qui joint l'origine au point du plan dont les coordonnées sont x et y. Il établit les règles de la multiplication de ces quantités et montre que $\sqrt{-1}$ peut être regardé comme un facteur qui a pour effet de faire tourner la droite, représentée par l'expression $x + y\sqrt{-1}$, d'un angle droit dans le sens positif (c'est-à-dire de x vers y) et que le facteur i fait de même tourner cette droite (qu'Hamilton appellera plus tard un *vecteur*) de l'angle $\frac{\pi}{2}$ dans le sens positif. C'était un premier pas important, mais, ni Argand, ni ses successeurs [en particulier *Mourrey* (1), *Warren* et *Cauchy* lui-même] ne parvinrent à étendre à l'espace la multiplication complexe ainsi définie dans le plan. Du moins, l'essai de Warren manquait des qualités de simplicité nécessaires à un calcul pratique.

Möbius (*Barycentrische Kalkul*, 1827), considérant la question à un autre point de vue, prit comme élément de calcul *le point*, et montra qu'on pouvait regarder un point quelconque de l'espace comme barycentre de quatre points déterminés et fixes de l'espace, en affectant ceux-ci de masses convenables qu'on appelle *coordonnées barycentriques du point*.

Bellavitis (*Méthode des Équipollences* « 1832-1837-1854 ») (2) introduit directement la somme géométrique des vecteurs et fonde une

---

(1) Mourrey. *Vraie théorie des quantités négatives et des quantités prétendues imaginaires*. Paris, 1828. Réédité par Gauthier-Villars, Paris, 1861.

(2) Traduit par C. Laisant. Gauthier-Villars, Paris, 1874.

méthode de Calcul applicable à certaines questions de Mécanique et de Géométrie plane, sur une proposition que l'on pourrait actuellement énoncer de la manière suivante : Soient α, β, γ trois vecteurs *situés dans un même plan*. Il existe toujours trois nombres réels x, y, z, tels que l'on ait

$$x\alpha + y\beta + z\gamma = 0.$$

Il introduisait de plus une notion nouvelle, celle de l'*inclinaison* des vecteurs par rapport à un axe de référence arbitrairement choisi, de sorte que l'équation

$$AB = \frac{CD.EF}{GH}$$

signifie que l'on a

$$\text{grandeur de AB} = \frac{\text{gr.CD.gr.EF}}{\text{gr.GH}},$$

mais avec la condition supplémentaire

(a) inclinaison de AB sur l'axe = incl. CD + incl. EF − incl. GH.

Enfin Bellavitis employait le *ramun* $\sqrt{}$ (contraction de racine de -1) qui n'est autre chose que le symbole i d'Argand. Il faut reconnaître que, grâce à la condition (a), certaines questions concernant principalement les figures semblables sont traitées par la méthode de Bellavitis plus facilement que par aucune autre.

Par un hasard singulier et qui n'est pas unique dans l'histoire des sciences, la question de l'établissement d'une Analyse géométrique à la fois simple, claire et féconde fut résolue presque en même temps par deux mathématiciens, de deux façons d'ailleurs tout à fait indépendantes. L'un est le mathématicien anglais Sir William Rowan Hamilton, professeur à l'Université de Dublin; le second est le mathématicien allemand Hermann Grassmann, professeur à l'Université de Stettin. C'est en effet en 1843 que paraissent les premières communications d'Hamilton sur le Calcul qu'il a appelé *Calcul des Quaternions* et c'est en 1844 qu'est publiée la première *Ausdehnungslehre* de Grassmann. Les deux méthodes sont essentiellement différentes, et n'ont guère de contact que par leur base commune :

la théorie des nombres supérieurs. Tandis que, Hamilton n'a en vue que le Calcul de l'espace euclidien, Grassmann s'attaque immédiatement à l'espace le plus général à n dimensions. Hamilton prend comme base le *Vecteur*, tandis que Grassmann met à la base de son Analyse géométrique, le *Point*. Tous les systèmes de Calcul vectoriel actuellement en usage dérivent de l'une ou de l'autre de ces méthodes dont notre Précis a pour but de donner un exposé suffisant, mais cependant réduit à ce qu'elles contiennent d'essentiel pour les applications géométriques et mécaniques.

La méthode de Grassmann ne se répandit pas tout d'abord et, dans la Préface de l'édition de 1862, l'auteur se plaint avec un peu d'amertume du peu d'attention que le monde savant a apporté jusque-là à son œuvre, en affirmant pourtant avec énergie sa foi inébranlable dans le triomphe de ses méthodes, « car, dit-il, la vérité est éternelle et divine ». Le peu de succès de la conception géniale de Grassmann tient à plusieurs causes. La plus importante est certainement que l'*Ausdehnungslehre* de 1844, écrite dans un langage philosophique d'une portée très générale, sans qu'aucune application en vienne montrer le maniement et l'utilité immédiate, contenait un nombre trop considérable d'idées et de notions complètement nouvelles au moment où elle parut, pour qu'elle ne semblât pas à cette époque une théorie purement spéculative. Ajoutez à cela que le texte de Grassmann est difficile à lire, même aujourd'hui, alors qu'un grand nombre de ces idées nouvelles sont entrées dans le domaine public, et devait l'être doublement à cette époque, à cause de la généralité même des propositions qu'il énonce. L'*Ausdehnungslehre* de 1862, mise sous une forme plus didactique, échappait en partie à cet inconvénient. Mais, comme elle ne s'appliquait pas non plus uniquement à un domaine déterminé et familier tel que celui de la Géométrie analytique ordinaire, on y accorda peu d'attention. Au contraire, le *Calcul des Quaternions* d'Hamilton était présenté immédiatement par son auteur comme une Analyse géométrique appliquée par lui dans de nombreux exemples à diverses questions de Géométrie analytique ou différentielle, et de Physique mathématique.

La lecture des Ouvrages d'Hamilton est facile et même attrayante à cause de la grande érudition de l'auteur, qui semble avoir pris à tâche, dans chacune des questions qu'il aborde, de faire connaître impartialement l'historique succinct de la question et les antériorités existantes, en sorte qu'on a pu dire, non sans quelque raison, que les « *Éléments* » sont une sorte d'encyclopédie mathématique résumant l'état de la science à l'époque de l'auteur. Aussi sa méthode plus ou moins modifiée se généralisa-t-elle assez rapidement à l'étranger. L'usage que Maxwell en fit le premier dans son Traité d'Électricité et de Magnétisme semble avoir heureusement contribué à ce résultat. Parmi les disciples d'Hamilton qui contribuèrent le plus à répandre sa doctrine, il faut citer ensuite P.-G. Tait, professeur au Royal Collège de Cambridge, dont le « *Traité élémentaire des Quaternions* » (Oxford, 1867) a eu en Angleterre deux éditions et a été traduit en France par G. Plarr, qui l'a édité chez Gauthier-Villars en deux volumes parus en 1882-1884.

A partir du moment où parurent les *Éléments* de 1866, dont la publication avait d'ailleurs suivi de peu celle de la seconde édition de l'*Ausdehnungslehre* en 1862, le public mathématique commença à s'intéresser à ces nouvelles méthodes qui apportaient dans plusieurs questions une clarté toute nouvelle. Toutefois, comme les points de départ des deux fondateurs étaient essentiellement différents, attendu que l'un d'eux (Hamilton) ne supprimait qu'en apparence les axes fixes de coordonnées, puisqu'il conservait l'origine et établissait en réalité trois axes i, j, k, de directions indéterminées, tandis que le second (Grassmann) arrivait à supprimer tout système de référence et même à se passer d'origine, il se forma deux courants, et l'on pourrait même dire deux partis, si ce mot ne paraissait pas en contradiction avec la nature précise des spéculations mathématiques. Tandis qu'en Angleterre et en Amérique on se ralliait plutôt à la méthode d'Hamilton, en Allemagne on développait et l'on appliquait de préférence les idées de Grassmann. La querelle ainsi engagée entre « monovectoristes » ou Hamiltonniens et « bivectoristes » ou Grassmanniens, est encore en cours et n'est pas près de s'éteindre.

Aussi bien n'y a-t-il aucune raison pour qu'elle ne se termine jamais tant que la question, qui divise les deux partis en cause, sera posée sous la forme un peu simpliste : « Quelle est la meilleure des deux méthodes, de celle d'Hamilton ou de celle de Grassmann ? ». Sur la question ainsi posée, d'une manière à notre avis trop générale, on peut discuter indéfiniment. De même il est absurde de se demander laquelle de ces deux méthodes est la plus conforme à la vérité. La méthode hamiltonnienne est une méthode *particulière* répondant à un but défini qu'elle atteint par des procédés d'une majestueuse simplicité. La méthode grassmannienne est *une autre* méthode *particulière*, plus générale cependant que la première, en ce qu'elle la contient en partie, répondant à un but plus général qu'elle atteint par d'autres procédés qui lui sont spéciaux. Mais l'une est aussi *vraie* que l'autre; et, quand l'un des deux auteurs regarde comme essentiellement négative une quantité que le second considère comme essentiellement positive [1], il n'y faut voir aucune contradiction, mais seulement la suite logique de points de départ différents et de la mise en œuvre de procédés absolument distincts.

La question précise qui se pose est d'un ordre tout différent et ne laisse pas que de présenter un intérêt considérable. Est-il possible de synthétiser les œuvres de Grassmann et d'Hamilton en une méthode unique participant à la fois de la généralité de l'une et de la simplicité de l'autre, au moins en ce qui concerne les applications au domaine géométrique euclidien ? Des efforts ont été tentés dans ce sens et les travaux les plus importants sont ceux de Gibbs qui, dans sa « *Vector Analysis* », a présenté une méthode à la fois assez simple, puissante et féconde où se résument les traits caractéristiques des deux Écoles. On peut regretter toutefois que les conceptions de Gibbs ne soient pas toujours développées avec la précision désirable, et que son travail, écrit dans le but de mettre entre les mains de ses élèves une méthode de Calcul directement applicable aux sciences physiques,

---

[1] Pour Hamilton, le carré d'un vecteur-unité dans l'espace euclidien est égal à -1; pour Grassmann, il est égal à $+1$.

manque en certains points de simplicité et de netteté. C'est ainsi que tout en reconnaissant l'avantage de la notation et de la théorie de Gibbs, sous forme de *Produit dyadique*, sur celles qu'Hamilton avait employées, sous le nom de *Fonctions vectorielles linéaires*, nous ne pouvons admettre avec lui la notation $i^2 = +1$ qui interdit l'emploi du quaternion et par conséquent du *verseur*, bien préférable cependant à l'emploi des dyadiques et du vecteur « semi-tangente de version » de Gibbs, dans les applications relatives aux rotations. A ce point de vue, la conception d'Hamilton semble s'imposer par sa simplicité inégalable.

Les Ouvrages didactiques sur le Calcul vectoriel, sorte de compromis entre les deux méthodes, qui a cours maintenant chez presque tous les physiciens et mécaniciens étrangers, sont nombreux tant en Europe qu'en Amérique. En France, cependant, il existe très peu de chose, et si nous exceptons l'*Introduction au Calcul des Quaternions* de Laisant, livre peut-être un peu trop élémentaire, la traduction du Traité de Tait citée plus haut, une Introduction de Sarrau publiée en addition à la traduction du Traité de Maxwell par Seligmann-Lui, le Calcul vectoriel semble avoir été complètement délaissé chez nous jusqu'à ces dernières années ([1]). On se rendra compte du peu d'attention apportée à cette méthode en constatant qu'il n'existe aucune traduction française des Ouvrages fondamentaux d'Hamilton et de Grassmann. Cependant le développement des travaux faits à l'étranger, l'importance grandissante qu'acquéraient des notions telles que celles de divergence, de tourbillon, de potentiel vectoriel, qui trouvent dans le Calcul vectoriel une expression simple et adéquate, ne pouvaient manquer d'avoir leur répercussion. Aussi voit-on les Traités de Physique et de Mécanique s'emparer de ces notions fondamentales, mais, par un fait bizarre, au lieu de recouvrir ces idées du vêtement qui leur convient et qui leur sied particulièrement, on continue à traîner les lourdes notations ordinaires des coordonnées qui dissi-

([1]) Nous citerons pour mémoire le Volume IV du *Traité des Quantités complexes* de Hoüel, où l'auteur expose la théorie des Quaternions, mais a le grand tort de modifier d'une manière plutôt malheureuse les notations d'Hamilton.

mulent la réalité du fait lui-même derrière un formidable appareil de notations étrangères au fait physique. Pourtant, il semble que le besoin se fasse sentir de revenir à des notations plus naturelles et l'apparition de deux Ouvrages récents [1] semble montrer que le public commence à sentir la nécessité de se mettre au courant des méthodes maintenant si universellement adoptées à l'étranger. Nous ne pensons pas que notre travail fasse double emploi avec les bons Ouvrages que nous venons de citer. Les conditions spéciales dans lesquelles il a été écrit, alors qu'étant prisonnier en Allemagne, nous cherchions simplement à donner à quelques camarades d'infortune les notions nécessaires pour leur permettre la lecture des Ouvrages de Physique ou de Mécanique allemands, les seuls que nous pouvions nous procurer pendant une longue période de temps, font que nous avons dû nécessairement nous borner à faire un petit manuel essentiellement pratique sans aucune prétention et d'une lecture très facile. Le lecteur, déjà au courant des principes du Calcul, n'y trouvera sans doute rien de nouveau, mais nous espérons que le débutant nous lira sans aucune difficulté. Dans ce but, nous avons multiplié les renvois et nous avons fait précéder le travail d'une Table analytique développée qui forme en même temps un formulaire facile à consulter quand il s'agit de retrouver une formule au cours de la lecture d'un chapitre. Un Index alphabétique, établi sur le modèle de ceux que Grassmann a ajoutés à ses deux Ouvrages, facilite les recherches. Nous avons inséré un assez grand nombre d'exercices dans le texte en donnant des indications sur leur solution et nous pensons que, tel qu'il est, ce petit Ouvrage peut rapidement mettre le lecteur à même de lire et de comprendre ce qui s'écrit à l'aide de notations vectorielles. Dans un volume séparé, nous avons l'intention de publier de nouveaux exercices élémentaires, principalement choisis parmi ceux que nous avions écrits et traités pour les officiers qui partageaient notre captivité et qui désiraient se mettre le plus rapidement possible au courant d'une

---

(1) BURALI-FORTI, *Éléments de Calcul vectoriel*, traduction Lattés, Paris, Hermann 1910. — COFFIN, *Calcul vectoriel*, traduction Véronnet, Paris, Gauthier-Villars, 1914.

méthode complètement nouvelle pour eux. Nous y ajouterons la traduction d'un certain nombre de passages caractéristiques des maîtres qui ont fondé la Science. Il faudra seulement pour cela que nous puissions trouver le temps de rassembler les matériaux un peu éparpillés qui nous ont servi à cet enseignement et permis à nous-même de nous assimiler les premières notions.

Un mot, en terminant, sur les notations que nous avons adoptées. Nous avons conservé presque partout les notations originales de Grassmann et Hamilton. Exception est faite pour le produit extérieur de Grassmann que nous désignons souvent par (AB) ou même simplement AB au lieu de $[AB]$ ainsi que Grassmann le fait d'ailleurs lui-même. De même, nous avons pu admettre dans le cas de *deux* facteurs la notation $\alpha\beta$ de Gibbs au lieu de $S\,\alpha\beta$ de Hamilton et de même $\alpha \times \beta$ pour $V\,\alpha\beta$. Cependant, nous préférons en général les notations primitives qui sont plus claires, bien qu'un peu moins simples. Pour le *module*, nous avons adopté la caractéristique T (initiale du mot *Teneur*), tandis que la caractéristique T d'Hamilton se rapporte à la désignation du module par le mot *tenseur* et que ce mot a maintenant dans la littérature générale un tout autre sens (*cf.* Chap. IX, Art. 104).

Nous avons aussi préféré la notation α_0 à la notation $U\,\alpha$ pour indiquer un vecteur unité, comme étant plus commode pour l'écriture. La multiplication quaternionnienne est désignée par un point, pour la distinguer de la multiplication scalaire. Le point peut d'ailleurs presque toujours se supprimer sans ambiguïté. La multiplication dyadique ne comporte aucun signe, car il ne peut y avoir de confusion avec la multiplication scalaire.

Szczuczyn, 1916. Heidelberg, 1917.

R. Leveugle.

INTRODUCTION.

On rencontre en Mathématiques pures ou appliquées, par exemple en Mécanique ou en Physique, des quantités de deux classes différentes.

Les premières sont complètement définies en tout point de l'espace par un *nombre* attaché à ce point. Ce nombre exprime la *valeur* que la quantité variable considérée prend en ce point et suffit à définir complètement cette quantité en permettant de la rapporter aux trois unités fondamentales de masse, de longueur et de temps. Une quantité de ce genre s'appelle *quantité scalaire ou scalar*, expression due à Hamilton. Par exemple, en Géométrie, la longueur d'une ligne, le volume d'un solide, l'aire d'une surface, l'angle de deux directions sont des scalars. En Physique, la température en un point d'un corps, le travail d'une force, la densité en un point, la quantité d'électricité, la force vive sont également des scalars, car ces différentes *qualités* d'un point ou d'un objet s'expriment par un nombre dont la connaissance suffit pour que nous obtenions une notion complète de la qualité considérée, en comparant ce nombre à l'unité choisie. On peut, d'une manière générale, dire qu'une quantité scalaire n'est pas susceptible de *direction*.

A côté de quantités de ce genre, nous avons une autre classe de grandeurs qui ne peuvent être définies complètement au moyen d'un nombre et qui comportent l'*idée de direction*. Par exemple en Mécanique, les valeurs numériques de la vitesse ou de l'accélération d'un point ne m'apprennent presque rien sur l'état de mouvement du point auquel elles sont appliquées. Leur description complète devra comprendre celle de la droite suivant laquelle elles sont *dirigées* et

leur *sens* sur cette droite. De telles grandeurs sont dites *vectorielles*, dénomination due également à Hamilton. On voit d'ailleurs immédiatement qu'il y a des quantités vectorielles de divers genres.

Par exemple, la vitesse d'un point est complètement définie par la connaissance de sa grandeur, de sa direction et de son sens. Elle dépend donc de *trois* éléments scalars (un pour la grandeur et deux pour exprimer la direction par rapport à des axes fixes de coordonnées). C'est à des quantités de ce genre, dépendant de *trois* éléments scalaires, que nous réserverons *exclusivement* le nom de *vecteurs*. Considérons maintenant une force. C'est aussi une quantité dirigée, mais elle ne peut se déplacer que le long d'une droite de l'espace qui lui sert de support. Une droite de l'espace étant définie par quatre conditions, en ajoutant à ces conditions celle qui exprime la grandeur de la force, nous voyons que la force est une quantité vectorielle qui dépend de *cinq* éléments scalars. C'est donc une grandeur d'une autre nature que le vecteur. Nous verrons qu'une force s'exprime par un *bipoint*, et qu'on peut la regarder soit comme une fonction de deux *points*, soit comme une fonction *d'un point et d'un vecteur*.

D'autres grandeurs vectorielles sont encore plus compliquées et s'expriment soit par des fonctions de vecteurs, soit par des fonctions de points et de vecteurs. Ainsi, l'état élastique d'un solide, soumis à des forces extérieures et en équilibre, s'exprime en général en chaque point au moyen de *neuf* coefficients scalars et au moyen de *six* dans des cas particuliers. Nous trouverons ces grandeurs sous le nom de *fonctions vectorielles linéaires*.

Le nombre des coefficients scalars augmente encore dans la considération d'autres grandeurs qui interviennent dans certains états physiques. Par exemple, dans le cas de l'élasticité, si le corps considéré n'est pas homogène et isotrope, le nombre des coefficients scalars devient égal à *trente-six*. D'autres cas sont plus compliqués encore.

Le Calcul vectoriel a pour but d'établir entre les quantités vectorielles des règles de calcul aussi appropriées que possible à leur nature particulière et aussi simples que le comportent la complexité du sujet et la diversité des champs d'application. On doit regarder

comme les fondateurs à titres égaux de cette science nouvelle deux mathématiciens du siècle dernier dont les œuvres, établies indépendamment l'une de l'autre et sur des principes d'ailleurs entièrement différents (au moins *en apparence*, car elles ont pour fonds commun la théorie générale des nombres complexes), ont paru à peu près à la même époque. Les quatre Ouvrages fondamentaux cités ci-dessous forment la base de tous les travaux ultérieurs. Nous les citons par ordre de date en indiquant entre parenthèses la rubrique employée dans notre texte pour les références nombreuses relatives à ces traités de fonds.

Hermann Grassmann, *Die lineale Ausdehnungslehre*, 1844 (A_1);

Sir Rowan Hamilton, *Lectures on Quaternions*, 1853 (L);

Hermann Grassmann, *Die Ausdehnungslehre*, 1862 (A_2);

Sir Rowan Hamilton, *Éléments of Quaternions*, 1866 (E).

Les deux Ouvrages de Grassmann ont été réédités par la librairie Teubner à Leipzig, dans l'édition des *Œuvres complètes de Grassmann*, publiées par les soins de la Section de mathématiques et de physique de la Compagnie des Sciences royale de Saxe. Les deux ouvrages cités forment le premier volume de cette édition. Le tome I de ce volume (1894) comprend l'*Ausdehnungslehre* de 1844 et l'*Analyse géométrique*. Le tome II (1896) comprend l'*Ausdehnungslehre* de 1862.

Les *Lectures* de Hamilton ont été éditées en 1853 à Dublin par les soins de l'Université de Dublin, chez Hodges and Smith, et n'ont pas été réimprimées. Le livre est devenu rare.

Les *Éléments* ont été édités en 1866 chez Longmans Green and C° à Londres. L'original est devenu assez rare; mais Longmans en a fait une nouvelle édition en deux volumes en 1899 par les soins de Sir Jaspar Joly, qui y a ajouté quelques notes très intéressantes, l'une en particulier sur la fonction Nabla.

Il n'existe de traduction française d'aucun de ces Ouvrages.

Nos références se reportent aux numéros des articles afin qu'on puisse les retrouver facilement suivant l'édition que l'on pourra consulter. Par exemple (A_2, 138), (E, 150) reporteront respec-

tivement le lecteur aux articles 138 de l'*Ausdehnungslehre* de 1862 et 150 des *Éléments of Quaternions*.

Nous devons ajouter que, autant les deux livres d'Hamilton sont d'une lecture facile et attrayante (*voir* par exemple la Préface des *Lectures*, où l'auteur donne un historique développé et impartial de la question et un exposé du processus des idées qui l'ont conduit à l'établissement de son système), autant la lecture des Ouvrages de Grassmann, surtout celui de 1844, est pénible et difficile pour un débutant, à cause principalement de leur très grande généralité et du manque complet d'exemples et d'exercices permettant de concrétiser les idées. Ceux-ci abondent au contraire dans les Ouvrages d'Hamilton et se rapportent à tous les genres. Nous pouvons conseiller, comme la meilleure introduction à la lecture de Grassmann, un excellent livre de F. Kraft « *Abriss des Geometrischen Kalküls* » (Teubner, Leipzig 1893). Nous espérons toutefois que le lecteur familiarisé avec les notions élémentaires exposées dans les Chapitres I à IV de notre Ouvrage ne rencontrera plus dans l'*Ausdehnungslehre* de difficulté sérieuse.

TABLE ANALYTIQUE DES MATIÈRES.

Art. Pages.

Préface de M. Fehr..... V

Préface de l'Auteur..... VII

Introduction : Quantités scalaires. Quantités vectorielles. Ouvrages fondamentaux sur la matière..... XVII

CHAPITRE I.

NOTIONS GÉNÉRALES SUR LES NOMBRES COMPLEXES.

1 2. *Définitions :* On définit la *dépendance numérique* entre des grandeurs a, b, c, ... par une équation de la forme

$$a = xb + yc + \ldots,$$

où x, y, ... sont des nombres (ou *scalars*).

Deux grandeurs sont dites *congruentes* lorsqu'on a

$$a = xb, \qquad \text{ce qui s'écrit aussi} \qquad a \equiv b.$$

L'unité *absolue* est le nombre $+1$. Toute autre unité est dite *relative*.

Définition d'un *système d'unités*.

Définition de la *grandeur du premier degré*..... 1

3. L'addition et la soustraction des nombres complexes suivent les règles ordinaires du calcul algébrique..... 3

4. La *multiplication* et la *division* d'un nombre complexe *par un scalar* s'obtient en multipliant ou divisant par ce nombre ($\neq 0$) les coefficients des unités ou grandeurs dont le nombre complexe est numériquement dérivé..... 3

5. *Définition du domaine.* — Le *degré du domaine* est le nombre de grandeurs du premier degré indépendantes, au moyen desquelles on peut obtenir toutes les grandeurs du domaine..... 3

6. Définition générale de la multiplication des nombres complexes... 5

7. Principe du *Calcul des quaternions* (HAMILTON)..... 7

8. Principe de l'*Ausdehnungslehre* (GRASSMANN)..... 7

(*Remarque :* Il est essentiel que le lecteur connaisse à fond les articles et les définitions de ce court Chapitre auxquelles nous aurons constamment à faire appel.)

CHAPITRE II.

I. — Le point et le spath.

Art. Pages.

9. Le point élément géométrique des figures. Figure du premier, du deuxième, du troisième, du quatrième degré 8

10. *Définitions : a.* Définition du *vecteur;*
b. Le *parallélogramme* ABC et le parallélogramme $\alpha\beta$:
c. Le *spath* ABCD et le spath $\alpha\beta\gamma$.
Définition de la *teneur* d'un vecteur, d'un parallélogramme, d'un spath..... 9

11. *Rapport de deux spaths :* Il est égal au rapport de leurs teneurs avec le signe + ou le signe — suivant qu'ils ont même signe ou non.
Équations
$$ABCD = -BACD = -ACBD = \ldots$$
$$\alpha\beta\gamma = \beta\gamma\alpha = -\beta\alpha\gamma = \ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 11$$

II. — La forme F_1.

12. *Définitions :* On appelle *forme* F_1 une expression
$$F_1 = aA + bB + cC + \ldots,$$
dans laquelle a, b, c, ... sont des scalars et A, B, C, ... des points.
Égalité de deux formes F_1.
La somme des coefficients
$$m = a + b + \ldots$$
s'appelle la *masse* de la forme.
Une forme F_1 représente un *point multiple* ou un *vecteur*..... 12

A. *La forme F_1 de masse non nulle. Calcul barycentrique.*

13. *Théorème :* Une forme $aA + bB$, où $a + b \neq 0$, peut se mettre sous la forme $(a + b)C$, C étant un point de la droite AB déterminé par la relation $\frac{CA}{CB} = -\frac{b}{a}$ 12

14. Extension du théorème précédent à une F_1 quelconque *de masse non nulle*
$$F_1 = aA + bB + \ldots + lL,$$
on a
$$F_1 = mG \quad \text{avec} \quad m = a + b + \ldots + l;$$
G est un point parfaitement défini appelé *barycentre* de la F_1.. 13

15. *Équation de la droite* AB :
$$(a') \qquad C = \frac{xA + yB}{x + y} \quad \text{avec} \quad \frac{y}{x} = -\frac{CA}{CB}.$$

Art. Pages.

Condition de *collinéarité* de trois points A, B, C :

$$xA + yB + zC = 0 \quad \text{avec} \quad x + y + z = 0.$$

Équation du plan ABC :

(*b*) $$(x + y + z)D = xA + yB + zC.$$

Condition de *coplanarité* de quatre points ABCD :

$$aA - bB - cC + dD = 0 \quad \text{avec} \quad a + b + c - d = 0.$$

Représentation barycentrique d'un point quelconque P de l'espace :

(*c*) $$P = \frac{xA + yB + zC + uD}{x + y + z + u}.$$

On peut poser

(*d*) $$x + y + z + u = 1,$$

et alors

$$P = xA + yB + zC + uD.$$

x, y, z, u sont les *coordonnées barycentriques* du point P.... 14

16. *Applications :* Barycentre des sommets, du périmètre d'un triangle, etc..... 15

B. *La forme* F_1 *de masse nulle. Le vecteur.*

17. La *forme* (différence de deux points)

$$F_1 = B - A$$

représente le *vecteur* α équipollent au segment dirigé AB. Généralement une forme F_1 de *masse nulle* représente un *vecteur*... 17

18. *Multiplication d'un vecteur par un scalar :* Le produit $m\alpha$, où m est un scalar et α un vecteur, est un vecteur parallèle à α, qui a même sens ou sens opposé suivant que $m > 0$ ou < 0 et dont le module est m fois celui de α. La longueur du vecteur s'appelle sa *teneur*. On écrit

$$\text{module de } \alpha = T\alpha,$$

α_0 représente un vecteur unité ayant même direction et sens que α.

On a

$$\alpha = T\alpha . \alpha_0 = \alpha_0 . T\alpha \quad \text{ou} \quad \alpha_0 = \frac{\alpha}{T\alpha}$$ 19

19. *Addition des vecteurs :* Règle du parallélogramme..... 20

20. L'équation

$$x\alpha + y\beta = x'\alpha + y'\beta,$$

Art. Pages.

où α et β ne sont pas parallèles équivaut aux équations

$$x = x', \qquad y = y'.$$

L'équation

$$x\alpha + y\beta + z\gamma = x'\alpha + y'\beta + z'\gamma$$

équivaut à

$$x = x', \qquad y = y', \qquad z = z'.$$

Équation vectorielle de la droite AB :

$$(x - y)\rho = x\alpha + y\beta.$$

Équation vectorielle du plan ABC :

$$(x + y - z)\rho = x\alpha - y\beta + z\gamma \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 21$$

21. *Décomposition d'un vecteur suivant trois directions* non coplanaires.

Triplet i, j, k de Hamilton..... 23

C. *La forme* F_2. *Le bipoint.*

22. Définition de la *forme* F_2 :

$$F_2 = a_1 A_1 B_1 - a_2 A_2 B_2 - \ldots = \Sigma a AB.$$

Égalité de deux F_2.

Définition du *bipoint* AB : Il est représenté par le *vecteur glissant* allant du point A au point B 24

23. *Réduction d'une* F_2. — I. La somme d'un nombre quelconque de bipoints *coplanaires* est un bipoint situé dans leur plan.

II. Une somme de bipoints *concourants* est un bipoint passant par leur point de concours.

III. Une somme de bipoints *quelconques* se ramène à une somme de deux bipoints *généralement non coplanaires* 26

D. *Les formes* F_3 *et* F_4. *Le tripoint.*

24. Définition de la *forme* F_3 :

$$F_3 = \Sigma a ABC.$$

Égalité de deux F_3.

Définition du *tripoint* ABC : Il est représenté par le parallélogramme ABC et peut glisser *dans son plan*, sans changer de teneur et d'orientation.

La *somme* de deux tripoints est un tripoint..... 28

25. Définition de la *forme* F_4 :

$$F_4 = \Sigma a ABCD.$$

C'est une somme de *spaths*..... 29

Exercices et Notes sur le Chapitre II 31

Note sur les points multiples..... 31

Exercices divers..... 32

CHAPITRE III.

PRODUIT DES FORMES ENTRE ELLES.

Art. Pages.

26. *Définitions :* On entend par *point à l'infini* les directions d'une droite; par *droite à l'infini* l'ensemble des directions d'un plan; par *plan à l'infini* l'ensemble des directions de l'espace. L'espace géométrique est un domaine du quatrième degré relativement au point. Le domaine des vecteurs de l'espace est du troisième degré 43

A. *Complément. Multiplication alternée. Produit extérieur.*

27. On considère la *multiplication particulière* soumise aux règles suivantes :

1° Un produit monome d'unités *change de signe* lorsqu'on permute deux facteurs consécutifs;

2° Un produit monome d'unités *s'annule* lorsque deux facteurs consécutifs sont égaux.

On appelle cette multiplication, *multiplication alternée,* et son résultat *produit extérieur.*

Formule importante :

$$a(b+xa)=ab \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 45$$

28. *Complément d'une grandeur :* Soit E une grandeur de degré $r<n$ d'un domaine de degré n. On pose (condition essentielle)

$$(1) \qquad [e_1 e_2 \ldots e_n] = +1,$$

et l'on forme le produit extérieur des unités qui n'entrent pas dans E, soit E'. On dit que E' ou — E' est le complément de E suivant que

$$(2) \qquad [EE'] = +1, \qquad \text{d'où} \qquad |E = [EE']E'.$$

Le complément d'un scalar est ce scalar lui-même.

Le complément d'une grandeur $A = \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \ldots$ est, *par définition,*

$$(3) \qquad |A = \alpha_1 |E_1 + \alpha_2 |E_2 + \ldots.$$

On a les formules

$$(4) \qquad [E_r | E_r] = 1,$$

$$(5) \qquad ||A = (-1)^{qr} A$$

(q étant le degré de A et r celui de $|A$) ou

$$(7) \qquad ||A = (-1)^q A,$$

si le degré du domaine est *pair;*

$$(8) \qquad ||A = A,$$

si le degré du domaine est *impair* 46

Art. Pages.

29. *Produit régressif :* Il est défini par l'équation

(1) $$|[EF] = [|E|F].$$

lorsque la somme des degrés de E et F est $> n$. *Il n'est pas associatif.*

Un produit *planimétrique* est le résultat de la multiplication tant progressive que régressive dans le domaine *du plan.*

Un produit *stéréométrique* est ce résultat dans le domaine *de l'espace.* Un produit extérieur, quand on ne distingue pas entre produit progressif et produit régressif s'appelle *produit relatif.* 48

B. *Produit intérieur.*

30. *Définition :* Le *produit intérieur* de deux unités est le produit relatif de la première et du complément de l'autre. Cette définition est étendue à deux grandeurs quelconques A et B de sorte que le produit intérieur de A et de B est le produit $[A|B]$.

Le produit intérieur de deux *unités égales* est égal à $+1$.

On peut intervertir l'ordre des facteurs dans un produit intérieur lorsque ces facteurs sont *du même degré.*

Le produit intérieur de deux unités *différentes* est *nul* 49

C. *La multiplication dans l'espace considéré comme domaine du quatrième degré.*

31. *Produit extérieur de points :* On peut poser :

(*p*) $[AB] = AB =$ le bipoint AB;

(*q*) $[ABC] = ABC =$ le tripoint ABC;

(*r*) $[ABCD] = ABCD =$ le spath ABCD.

L'équation

$$[ABCD] = 0$$

exprime que les quatre points A, B, C, D sont coplanaires..... 50

32. Règle mnémonique pour obtenir le complément d'un produit de points..... 55

33. Le complément du produit de deux unités d'ordre quelconque est égal au produit des compléments de ces unités..... 56

34. Deux lemmes importants :

I. Le produit extérieur d'un point simple à distance finie et d'un vecteur est un bipoint équipollent au vecteur donné et passant par le point considéré.

II. Le produit extérieur d'un point simple et d'un *bivecteur* (ou produit de deux vecteurs) est un tripoint dont le plan passe par le point donné et qui a même teneur et même signe que le bivecteur..... 57

Art. Pages.

35. Le produit régressif de deux grandeurs est congruent à leur élément commun..... 58

36. Le produit relatif de deux grandeurs *unies* est nul..... 60

37. Quelques énoncés spéciaux des théorèmes généraux précédents pour le cas des facteurs *parallèles*..... 61

D. *La multiplication alternée dans l'espace comme système du troisième degré.*

38. Unités e_1, e_2, e_3 formant un triplet *à droite*. Un vecteur s'exprime sous la forme

$$\alpha = xe_1 + ye_2 + ze_3,$$

et l'on a

$$(1) \qquad a = \text{mod}\,\alpha = \text{T}\alpha = +\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

On a les relations suivantes entre les unités

$$e_1e_2e_3 = +1, \qquad e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = -1, \qquad e_1e_2 = -e_2e_1,$$

$$e_2e_3 = -e_3e_2, \qquad e_3e_1 = -e_1e_3 \ldots\ldots\ldots\ldots 62$$

39. Le *produit extérieur* de deux vecteurs α et β a pour *complément* un *vecteur* γ perpendiculaire à α et β, dont le module est

$$\text{T}\gamma = \text{T}\alpha\,\text{T}\beta \sin\theta,$$

et dont le sens est tel que la rotation de α vers β soit positive par rapport à ce vecteur. [En d'autres termes, le triplet (non rectangulaire) $\alpha\beta\gamma$ est à *droite*.]

Le *produit intérieur* des vecteurs α, β est un *nombre*

$$[\alpha \mid \beta] = \text{T}\alpha\,\text{T}\beta \cos\theta.$$

Définition du *bivecteur* $= [\alpha\beta]$ *produit extérieur de deux vecteurs.*

Un vecteur a pour complément un bivecteur et réciproquement.

Relations entre les unités e_1, e_2, e_3..... 65

E. *Multiplication alternée des formes.*

40. Produit progressif et régressif des formes..... 67

CHAPITRE IV.

EXERCICES ET APPLICATIONS. APPLICATIONS MÉCANIQUES DES F_2.

41. Exercices de calcul :

III. Règle du *double produit* ou du *facteur moyen :*

$[AB.AC] = [ABC].A$ (règle du double produit :
$[AC.BC] = [ABC].C$ (id.);
$[AB.BC] = [ABC].B$ (règle du facteur moyen).

Art. Pages.

A, B, C étant des nombres, des points, des droites ou des plans, et *le produit* [ABC] *étant de degré nul*..... 69

XII. Une somme S de bipoints est réductible à un bipoint unique lorsque l'on a [SS] = 0..... 73

XIII. Une somme de bivecteurs est un bivecteur..... 73

XIV. Formule du *double produit vectoriel*

$$[\alpha\beta|\gamma] = \beta[\alpha|\gamma] - \alpha[\beta|\gamma]$$..... 73

42. *Coordonnées barycentriques :* Équations entre cinq tétraèdres... 74

43. *Coordonnées pluckériennes* de la droite..... 76

44. *Commutativité d'un produit :*

III. Dans un produit de *deux* à *quatre points* ou *plans* on peut ranger les facteurs dans un ordre quelconque..... 77

IV. Un produit reste congruent à lui-même quand on échange entre eux deux facteurs *consécutifs unis* (c'est-à-dire incidents). 78

45. *Perspectivité* et *projectivité* dans le plan. *Théorème de Pascal*.. 78

46. Courbe *de deuxième classe*. Théorème de *Brianchon*. *Configuration de Maclaurin*..... 82

47. Produits stéréométriques dans l'espace. Surface réglée du second ordre..... 85

48. Applications à la *cinématique* et à la *statique* du *solide*.

Un *bipoint* représente une rotation instantanée et *un couple de bipoints* représente une *translation*. En *statique*, un bipoint représente une *force* et un bivecteur ou couple de bipoints représente un *couple*. On déduit de là une *dualité* entre les théorèmes de statique et ceux de la cinématique..... 88

49. *Réduction d'un système de forces*. Théorème de Chasles. Systèmes de deux *vecteurs conjugués*. Réduction à la forme d'une *vis :*

$$S = [A\sigma] - k|\sigma,$$

où σ est la résultante de translation et k le paramètre. *Axe central*.

Interprétation statique et cinématique de ces résultats..... 91

50. *Moment résultant :* Le moment d'une force [AB] par rapport au point O est

$$\mu = \frac{1}{2}[(A - O)(B - A)] = \frac{1}{2}[\alpha\gamma].$$

Axe central d'un système de forces.

Pour qu'un système de forces se réduise à une *résultante unique*, il faut et il suffit que le moment résultant soit perpendiculaire à la résultante de translation..... 95

51. *Exercices et Notes sur les Chapitres III et IV*..... 97

5. *Théorème de Newton* sur le quadrilatère circonscrit..... 99

Art. Pages.

7. Relation entre six points coplanaires (*Formule de Cayley*)

$$(ABC)(DEF) - (DBC)(AEF) + (CDA)(BEF) - (DAB)(CEF) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 99$$

10. Équation d'un cône du second ordre

$$X\alpha\beta\gamma\,\delta\varepsilon X = 0$$

ayant son sommet au point $\alpha\varepsilon$ 100

12 et suivants. *Système de Möbius* 100

51 *bis*. Sur les produits planimétriques 105

CHAPITRE V.

PRODUIT DE DEUX VECTEURS. QUATERNION.

52. On considère deux vecteurs

$$\alpha = x\,i + y\,j + z\,k,$$
$$\beta = x'i - y'j + z'k,$$

i, j, k étant un triplet rectangulaire *à droite* avec les relations

[A] $$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1;$$

[B] $$\left\{\begin{array}{l} ij = -ji = k, \\ jk = -kj = i, \\ ki = -ik = j. \end{array}\right.$$

Par multiplication complète (b) on obtient pour le produit $\alpha\beta$ la valeur

[P] $$\alpha.\beta = -(xx' + yy' + zz') - i(yz' - zy') + j(zx' - xz') - k(xy' - yx').$$

Ce produit à quatre termes s'appelle un *quaternion*. Soit q ce quaternion, on pose

$$Sq = -(xx' + yy' + zz') \qquad \text{lire } \textit{scalar } q;$$

$$Vq = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} \qquad \text{lire } \textit{vecteur } q;$$

de sorte que l'on a

[Q] $$q = Sq + Vq \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 107$$

53. *Scalar du produit :* On a

(3) $$Sq = -ab\cos\theta \qquad \text{(bien remarquer le signe —)},$$

où $a = T\alpha$, $b = T\beta$, θ = angle compris entre 0 et π que font les directions des vecteurs α et β.

L'équation

(4) $$S\alpha\beta = 0$$

Art. Pages.

exprime que les vecteurs α et β sont *rectangulaires*..... 109

54. *Vecteur du produit :* On a

(4) $$Vq = ab\sin\theta.\varepsilon, \qquad TVq = ab\sin\theta.$$

ε étant un vecteur unité défini comme le complément du produit extérieur $[\alpha\beta]$, de sorte que (36)

$$Vq = \|[\alpha\beta]\|.$$

L'équation

$$Vq = 0$$

exprime que α et β sont *parallèles*.

Notations :

$$S\alpha\beta = \alpha\beta.$$

$$V\alpha\beta = \alpha \times \beta \text{.....} \quad 110$$

II. *Règles de calcul.*

55. Le *réciproque* d'un vecteur α est un vecteur β tel que l'on ait

$$\alpha.\beta = 1.$$

On a

(1) $$\alpha_0 = -\beta_0. \qquad T\alpha = \frac{1}{T\beta} \qquad \text{ou} \qquad \beta = -\frac{\alpha_0}{a} = -\frac{\alpha}{a^2}.$$

Notation α^{-1} pour le réciproque.

Quotient de deux vecteurs :

(2) $$\frac{\beta}{\alpha} = \beta\alpha^{-1} \qquad \left(\text{et non } \frac{\beta}{\alpha} = \alpha^{-1}\beta\right).$$

Formule fondamentale :

(4) $$\frac{\gamma}{\beta}\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\alpha} \text{.....} \quad 111$$

56. Quaternion considéré *comme produit*. *Verseur*. En posant

(1) $$q = \frac{\beta}{\alpha}, \qquad \text{d'où} \qquad \beta = q\alpha.$$

On a

(3) $$q = Tq.Uq = \text{module } q, \text{verseur } q.$$

avec

(2) $$Tq = \frac{b}{a};$$

(4) $$Uq = \cos\theta + \varepsilon\sin\theta.$$

Le verseur $\cos\theta + \varepsilon\sin\theta$ fait tourner un vecteur α *perpendiculaire* à ε de l'angle $\pm\theta$ dans le sens *positif* autour de ε..... 112

57. *Notation exponentielle. Rotation conique :* Formule de Moivre généralisée

(1) $$(\cos m\theta + \varepsilon\sin m\theta) = (\cos\theta + \varepsilon\sin\theta)^m.$$

Art. Pages.

On peut alors poser

(2) $$\begin{cases} \cos\theta + \varepsilon\sin\theta = \varepsilon^{\theta}, \\ \cos\theta - \varepsilon\sin\theta = \varepsilon^{-\theta}. \end{cases}$$

θ étant compté en *angles droits*, ou encore

(4) $$\varepsilon^{m} = \cos m\frac{\pi}{2} + \varepsilon\sin m\frac{\pi}{2},$$

m étant un nombre réel quelconque.

L'opérateur

(6) $$\varepsilon^{m}(\quad)\varepsilon^{-m}$$

fait tourner un vecteur ρ *quelconque* de $2m$ angles droits dans le sens direct autour de ε..... 114

58. *Quaternion conjugué :* Soit

$$q = Sq + Vq.$$

Le quaternion conjugué est défini par

(1) $$Kq = Sq - Vq.$$

Formule fondamentale :

(2) $$q.Kq = Kq.q = T^2q.$$

On a

(3) $$KUq = UKq,$$

(4) $$K(\alpha\beta) = \beta.\alpha,$$

(5) $$K.Kq = q \qquad \text{ou} \qquad K^2 = 1.$$

(6) $$S^2q - V^2q = T^2q$$

ou

(7) $$(S + V)(S - V) = S^2 - V^2 = T^2.$$

(8) $$S^2\alpha\beta - V^2\alpha\beta = \alpha^2\beta^2.$$

(9) $$KS = S, \qquad KV = -V$$ 117

59. *Quaternions réciproques :* Définition $q^{-1}q = qq^{-1} = 1$:

(1) $$Tq^{-1} = (Tq)^{-1}, \qquad Uq^{-1} = (Uq)^{-1}.$$

Si

$$q = Tq(\cos\theta + \varepsilon\sin\theta),$$

on a

$$q^{-1} = \frac{1}{Tq}(\cos\theta - \varepsilon\sin\theta),$$

(2) $$Kq^{-1} = \frac{q}{T^2q},$$

(3) $$(Kq)^{-1} = Kq^{-1}.$$

(4) $$\begin{cases} Sq = \frac{1}{2}(q + Kq), \\ Vq = \frac{1}{2}(q - Kq) \end{cases}$$ 118

Art. Pages.

60. Représentation géométrique sur la sphère de la multiplication quaternionienne par l'addition d'arcs de grand cercle..... 119

61. Note sur l'équation [A]..... 121

NOTE. Nous n'avons fait aucun usage dans notre exposé de la notion de *biradiale* (c'est-à-dire du rapport de deux vecteurs) ni de celle de *verseur quadrant* (opérateur d'Hamilton qui fait tourner un vecteur d'un angle droit). Nous assimilons ainsi pour le calcul le verseur quadrant et le vecteur correspondant, chose permise dans le domaine où nous nous sommes limités. Voir à ce sujet : *Enseignement mathématique*, janvier, mars, mai, septembre, novembre 1909 et janvier, mars 1911, et SCHOUTEN, *Grundlagen der Vektor and Affinoranalysis*, Leipzig, 1914, p. 43 et suiv.

CHAPITRE VI.

PRODUITS DE PLUS DE DEUX VECTEURS. FORMULES GÉNÉRALES.

62. La multiplication des quaternions est associative et distributive... 125

63. *Deux formules fondamentales :*

$$S\alpha\beta\gamma = S\beta\gamma\alpha = S\gamma\alpha\beta = -S\beta\alpha\gamma = -S\alpha\gamma\beta = -S\gamma\beta\alpha,$$
$$V\alpha\beta\gamma = V\gamma\beta\alpha.$$

On a

(1) $$S\alpha\beta\gamma = -\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}.$$

L'équation

$$S\alpha\beta\gamma = 0$$

exprime que les trois vecteurs α, β, γ sont *coplanaires*..... 126

64. *Formule du double produit vectoriel :*

(1) $$V\alpha V\beta\gamma = \gamma S\alpha\beta - \beta S\alpha\gamma$$ 127

65. A. *Formules générales :*

(1) $$V\alpha\beta\gamma = \alpha S\beta\gamma - \beta S\gamma\alpha + \gamma S\alpha\beta,$$

(4) $$SV\alpha\beta V\gamma\delta = S\alpha\delta . S\beta\gamma - S\alpha\gamma S\beta\delta,$$

(7) $$V . V\alpha\beta V\beta\gamma = -\beta S\alpha\beta\gamma$$ 128

66. *Systèmes réciproques :* Le système réciproque des vecteurs α, β, γ supposés *non coplanaires* est défini par les équations

(1) $$\alpha' = -\frac{V\beta\gamma}{S\alpha\beta\gamma}, \qquad \beta' = -\frac{V\gamma\alpha}{S\alpha\beta\gamma}, \qquad \gamma' = -\frac{V\alpha\beta}{S\alpha\beta\gamma}.$$

Réciproquement, α, β, γ sont les réciproques de α', β', γ' :

(2) $$\alpha = -\frac{V\beta'\gamma'}{S\alpha'\beta'\gamma'}, \qquad \beta = -\frac{V\gamma'\alpha'}{S\alpha'\beta'\gamma'}, \qquad \gamma = -\frac{V\alpha'\beta'}{S\alpha'\beta'\gamma'}.$$

Art. Pages.

On a les relations

(3) $$S\alpha\beta\gamma\, S\alpha'\beta'\gamma' = 1,$$

(4) $$\begin{cases} S\alpha\alpha' = S\beta\beta' = S\gamma\gamma' = -1, \\ S\alpha\beta' = S\beta\alpha' = S\alpha\gamma' = \ldots = 0, \\ V(\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma') = 0. \end{cases}$$

Le système i, j, k est son propre réciproque.

Formules de décomposition d'un vecteur suivant trois directions.

(5) $$\rho = -(\alpha\, S\alpha'\rho + \beta\, S\beta'\rho + \gamma\, S\gamma'\rho),$$

(6) $$\rho = -(\alpha' S\alpha\, \rho + \beta' S\beta\, \rho + \gamma' S\gamma\, \rho),$$

(7) $$\rho S\alpha\beta\gamma = \alpha\, S\beta\gamma\rho - \beta S\gamma\alpha\rho + \gamma S\alpha\beta\rho,$$

(8) $$\rho S\alpha\beta\gamma = V\beta\gamma\, S\alpha\rho + V\gamma\alpha\, S\beta\rho + V\alpha\beta\, S\gamma\rho.$$

(9) $$\rho = -(iSi\rho + jSj\rho + kSk\rho) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$ 129

67. B. *Exercices de calcul.*

IV. α, β, γ et α', β', γ' étant deux systèmes de vecteurs quelconques, on a

$$S\alpha\beta\gamma\, S\alpha'\beta'\gamma' = -\begin{vmatrix} S\alpha\alpha' & S\beta\alpha' & S\gamma\alpha' \\ S\alpha\beta' & S\beta\beta' & S\gamma\beta' \\ S\alpha\gamma' & S\beta\gamma' & S\gamma\gamma' \end{vmatrix}.$$

V. Composantes d'un vecteur ρ suivant la direction α et suivant un plan perpendiculaire à α :

$$OP = \alpha\, S\alpha^{-1}\rho - \alpha^{-1} S\alpha\rho,$$
$$OQ = \alpha V\alpha^{-1}\rho = \alpha^{-1} V\alpha\rho.$$

XII. Soit

$$\varphi\rho = \alpha S\lambda\rho + \beta S\mu\rho + \gamma S\nu\rho,$$

on a

$$m = \frac{S\varphi\lambda\, \varphi\mu\, \varphi\nu}{S\lambda\mu\nu} = -S\alpha\beta\gamma\, S\lambda\mu\nu,$$

$$m_2 = \frac{S(\lambda\mu\varphi\nu + \mu\nu\varphi\lambda - \nu\lambda\varphi\mu)}{S\lambda\mu\nu} = S(\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu) \ldots\ldots\ldots$$ 130

CHAPITRE VII.

DIFFÉRENTIATION DES VECTEURS.

68. Absence générale de dérivée 136

69. Les signes S, V, K sont interchangeables avec le signe d 137

Art. Pages.

70. *Différentielles usuelles :*

(I) $$d\rho^2 = 2 S\rho\, d\rho :$$

(II) $$d\rho^{-1} = -\rho^{-1} d\rho\, \rho^{-1} :$$

(III) $$d(q + q' + \ldots) = dq + dq' + \ldots,$$
$$dqq' = dq\, q' + q\, dq',$$
$$dmq = m\, dq,$$

m étant un scalar constant :

(IV) $$dr = -S\varrho_0\, d\rho,$$
$$\frac{dr}{r} = S\frac{d\rho}{\rho} = S\rho^{-1} d\rho :$$

(V) $$d\varrho_0 = \frac{1}{r}(d\rho - \varrho_0\, dr),$$
$$\frac{d\varrho_0}{\varrho_0} = V\frac{d\rho}{\rho},$$
$$d\varrho_0 = -\varrho_0 V\, d\rho\, \rho^{-1} :$$

(VI) $$d\alpha^x = \alpha^{x+1}\, dx.$$

α étant un vecteur unité constant..... 137

71. Exercices et Notes sur les Chapitres V, VI et VII..... 140

72. Note sur la définition hamiltonienne des différentielles simultanées..... 145

Exercices sur les différentielles..... 150

CHAPITRE VIII.

APPLICATIONS A LA GÉOMÉTRIE ET A LA MÉCANIQUE.

A. *Applications géométriques.*

73. ***La ligne droite et le plan :*** L'équation vectorielle de la droite passant par les deux points $A(\alpha)$ et $B(\beta)$ est

(1) $$\rho = x\alpha + (1 - x)\beta,$$

ou [droite passant par $A(\alpha)$ et parallèle à β]

(2) $$\rho = \alpha + z\beta.$$

ou

(3) $$V(\rho - \alpha)\beta = 0.$$

Le plan perpendiculaire à α et passant par $B(\beta)$ a pour équation

(5) $$S\alpha(\rho - \beta) = 0.$$

Distance du point γ à ce plan :

(7) $$\delta = -\alpha^{-1} S\alpha(\gamma - \beta).$$

Art. Pages.

Distance de l'origine à la droite (2) :

(8) $$\rho = -\beta^{-1} V \alpha\beta.$$

Plus courte distance des deux droites :

$$\rho = \beta + x\alpha, \qquad \rho = \beta' + y\alpha',$$

dirigée de la première vers la seconde

$$\delta = z V \alpha\alpha' \qquad \text{avec} \qquad z = \frac{S\alpha\alpha'(\beta - \beta')}{T^2 V \alpha\alpha'} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 157$$

74. Coordonnées radiales et axiales de la droite..... 160

75. *La sphère :* Son équation

(1) $$(\rho - \alpha)^2 = -R^2.$$

Cône circonscrit. Plan polaire d'un point. Pôle d'un plan. Transformée de la sphère par rayons vecteurs réciproques..... 161

B. *Applications cinématiques.*

76. *Déplacements finis d'un solide :*

Un retournement de 180 autour de l'axe est donné par l'opérateur

(3) $$\alpha(\quad)\alpha^{-1} \qquad \text{ou} \qquad \alpha^{-1}(\quad)\alpha \qquad \text{ou} \qquad -\alpha_0(\quad)\alpha_0.$$

Deux retournements successifs autour de deux axes concourants équivalent à une rotation d'un angle double autour d'un axe perpendiculaire aux deux premiers.

Deux retournements successifs autour de deux axes non concourants équivalent à un déplacement hélicoïdal..... 164

77. *Théorème d'Hamilton* sur la composition de trois rotations finies autour d'axes concourants. Équation

$$\gamma^z \beta^y \alpha^x = -1,$$

où α, β, γ sont trois vecteurs unités disposés en ordre inverse de l'ordre i, j, k, et x, y, z les angles dièdres exprimés en angles droits..... 167

78. *Théorème d'Halphen* sur la composition de deux déplacements hélicoïdaux finis..... 169

79. Rotation finie autour d'un point fixe.

Paramètres d'Euler : Formules de transformation.

Expression des paramètres en fonction des angles d'Euler..... 170

80. *Mouvement instantané d'un solide :*

Formule de Poisson. Axe instantané.

Formule fondamentale pour la vitesse d'un point d'un solide :

(5) $$\varepsilon = \varepsilon_1 + V\Omega\rho,$$

Art. Pages.

Ω étant l'axe instantané de rotation

$$\Omega = pi + qj + rk \qquad \text{et} \qquad \omega = +\sqrt{p^2 + q^2 + r^2},$$

ω étant la vitesse instantanée de rotation..... 173

81. *Mouvement absolu et mouvement rotatif :*
Soient :

$\dot{\rho}_a$ la vitesse absolue;
$\dot{\rho}_e$ la vitesse d'entraînement;
$\dot{\rho}_r$ la vitesse relative.

On a

$$\dot{\rho}_a = \dot{\rho}_e + \dot{\rho}_r.$$

Théorème de Coriolis :

$$\ddot{\rho}_a = \ddot{\rho}_r + \ddot{\rho}_e + \ddot{\rho}_c.$$

Expression de l'accélération complémentaire :

$$\ddot{\rho}_c = 2\,\mathrm{V}\,\Omega\,\dot{\rho}_r \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 175$$

82. *Mouvement central* d'un point matériel.
La courbe est plane. *Théorème des aires.*
La trajectoire est une conique.
Loi de l'*hodographe circulaire* de *Hamilton* et sa réciproque... 177

C. *Courbes gauches.*

83. L'équation vectorielle

$$\rho = \varphi t$$

représente une courbe de l'espace.

Angle de contingence. Rayon de courbure $\mathrm{R} = \dfrac{ds}{\theta}$.

En prenant l'arc s comme variable indépendante l'équation de la tangente au point ρ est

$$\varpi = \rho - z\rho'_s \qquad \text{et} \qquad \rho'^2_s = -1.$$

Le *plan osculateur* est normal au vecteur $\mathrm{V}\rho'\rho'' = \rho'\rho''$, car

$$\mathrm{S}\rho'\rho'' = 0.$$

Le centre du *cercle osculateur* a pour vecteur $\gamma = \rho - \dfrac{1}{\rho''}$ et l'on a

$$\textit{Rayon de courbure} = \frac{1}{\mathrm{T}\rho''}.$$

Le centre de la *sphère osculatrice* a pour vecteur $\alpha = \rho + \dfrac{\mathrm{V}\rho'\rho'''}{\mathrm{S}\rho'\rho''\rho'''}$. 180

84. *Trièdre normal* (ou de Frenet) : C'est le trièdre trirectangle formé en un point d'une courbe gauche par les trois vecteurs unités suivants :

Art. Pages

1° Le vecteur ρ' suivant la tangente;

2° Le vecteur ν dirigé vers le centre de courbure (normale principale);

3° Le vecteur μ perpendiculaire aux deux autres dans le sens tel que

$$\mu = \rho'\nu \qquad \text{(binormale)}.$$

Torsion d'une courbe : C'est l'angle τ *positif ou négatif* dont tourne le plan osculateur par rapport à un observateur couché sur la tangente, la tête dans la direction du vecteur ρ'..... 183

83. *Formules de Frenet :*

$$(F)\qquad \begin{cases} d\rho' = \theta\nu, \\ d\nu = -\theta\rho' - \tau\mu, \\ d\mu = -\tau\nu. \end{cases}$$

Courbure totale

$$\omega = +\sqrt{\theta^2 + \tau^2}.$$

Droite rectifiante

$$\delta = \tau\rho' + \theta\mu.$$

C'est l'axe de rotation instantanée du trièdre normal..... 184

D. *Surfaces courbes.*

86. Une équation de la forme

$$(1)\qquad F(\rho) = \text{const.}$$

ou

$$(2)\qquad \rho = \varphi(u, v),$$

où F est une fonction *scalar*, et φ une fonction *vectorielle*, tandis que u et v sont deux *paramètres arbitraires*, représente une surface..... 187

87. *Directions conjuguées* de Dupin : Soit Δ une droite tangente à une surface au point P. On appelle *conjuguée de* Δ, l'intersection Δ' du plan tangent au point P, avec le plan tangent au point P', infiniment voisin de P sur Δ, c'est-à-dire la *caractéristique du plan tangent* quand le point de contact se déplace sur Δ. Réciproquement, Δ est conjuguée de Δ'.

La condition pour que deux directions soient conjuguées est

$$V\, d\rho_2 V n\, dn_1 = 0$$

ou

$$S\, d\rho_2\, dn_1 = 0,$$

dn_1 étant la variation de la normale à la surface dans la direction Δ, et $d\rho_2$ variation de ρ suivant l'autre direction Δ'..... 187

88. *Trièdre caractéristique :* Soit une courbe Γ tracée sur une surface. Le trièdre *caractéristique* au point P de la courbe est

Art. Pages.

formé par trois vecteurs unités : l'un, ρ', suivant la tangente à la courbe; le deuxième, j, dans le plan tangent perpendiculairement à la tangente; le troisième, n, normal à la surface et dirigé vers le centre de courbure de la section normale. On a les formules

$$(\mathrm{L})\quad \begin{cases} d\rho' = \quad gj + n\varepsilon \sin\varphi, \\ dj = -g\rho' - n\varepsilon\cos\varphi, \\ dn = \varepsilon(-\rho'\sin\varphi + j\cos\varphi). \end{cases}$$

Dans ces formules on a :

g, angle de contingence géodésique de la courbe;
ε, angle de deux normales à la surface infiniment voisines;
φ, angle de ρ' et de sa direction conjuguée.

On a aussi

$$(\mathrm{M})\quad \begin{cases} g = \theta \sin \mathrm{H}, \\ \varepsilon \sin\varphi = \theta\cos \mathrm{H}, \\ -\varepsilon\cos\varphi = \tau + d\mathrm{H}, \end{cases}$$

θ et τ sont respectivement les angles de contingence et de torsion;

H est l'angle du plan osculateur de la courbe et du plan tangent à la surface.

Théorème de Meunier. Théorème d'Ossian Bonnet..... 188

89. Applications des formules (L) aux *lignes de courbure* dont l'équation différentielle est

$$\mathrm{S}\, n\, dn\, d\rho = 0 \qquad \text{avec} \qquad \varphi = \frac{\pi}{2}$$ 191

90. *Lignes asymptotiques :*

$$\varphi = 0, \qquad \mathrm{H} = \frac{\pi}{2}.$$

Équation différentielle :

$$\mathrm{S}\, dn\, d\rho = 0$$ 193

91. *Lignes géodésiques :*

$$\mathrm{H} = 0.$$

Équation différentielle :

$$\mathrm{S}\, n\, d\rho\, d^2\rho = 0$$ 194

92-96. Exercices et Notes sur le Chapitre VIII..... 195
Note sur les formules contragradiantes..... 208

CHAPITRE IX.

LA FONCTION LINÉAIRE ET LA SURFACE DU SECOND ORDRE.

97. Définition d'une *fonction linéaire* par la relation

$$(2)\qquad \varphi\rho_1 + \varphi\rho_2 = \varphi(\rho_1 + \rho_2), \qquad \text{avec } \varphi 0 = 0;$$

d'où

$$(1)\quad \begin{cases} \varphi\, m\rho = m\varphi\rho, \\ \varphi\, d\rho = d\varphi\rho. \end{cases}$$

Art. — Pages.

La forme générale est

(3) $$\varphi\rho = \alpha S\lambda\rho + \beta S\mu\rho + \gamma S\nu\rho.$$

Fonction *conjuguée* φ' :

(4) $$\varphi'\rho = \lambda S\alpha\rho + \mu S\beta\rho + \nu S\gamma\rho.$$

Propriété fondamentale de la fonction conjuguée :

$$S\rho\varphi\sigma = S\sigma\varphi'\rho,$$

quels que soient ρ et σ 210

98. *Dyade. Dyadique :* Une *dyade* est le symbole

$$\alpha;\ \lambda$$

et deux dyades α; λ et α'; λ' sont égales lorsqu'on a, quel que soit ρ,

$$\alpha S\lambda\rho = \alpha' S\lambda'\rho;$$

si l'on a

$$\alpha;\ \lambda = \alpha';\ \lambda',$$

on a aussi

$$\lambda;\ \alpha = \lambda';\ \alpha' \text{ ..... } 211$$

99. Une *dyadique* est une somme algébrique de dyades.

Une dyadique est dite sous forme *nonion* lorsqu'elle est ramenée à une somme de multiples des neuf dyades

$$i;\ i,\quad i;\ j,\quad i;\ k,\quad j;\ i,\quad \ldots.$$

Elle ne peut s'y ramener que d'une seule manière.

Théorème I. — On peut toujours ramener une dyadique quelconque à une dyadique à trois termes et cela d'une infinité de façons.

Théorème II. — Les expressions

$$\Sigma S\alpha\lambda \quad \text{et} \quad \Sigma V\alpha\lambda$$

sont des *invariants*.

La dyadique *conjuguée* de la dyadique

$$\varphi = \alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu$$

est la dyadique

$$\varphi' = \lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma \text{ ..... } 213$$

100. *Dyadique inverse :* La dyadique

$$\varphi^{-1} = \lambda'\alpha' + \mu'\beta' + \nu'\gamma',$$

où α', β', γ' et λ', μ', ν' sont respectivement les *systèmes réciproques* des systèmes α, β, γ et λ, μ, ν, s'appelle *dyadique inverse* de φ. On a la relation

$$\varphi\varphi^{-1} = \varphi^{-1}\varphi = 1 \text{ ..... } 216$$

Art. Pages.

101. *Produit scalaire de deux dyadiques :* Le produit de deux dyades

$$\alpha ; \lambda \quad \text{et} \quad \beta ; \mu$$

est la dyade

$$(\alpha : \mu) S \lambda \beta.$$

Le produit de deux dyadiques s'obtient en ajoutant les produits des dyades qui les composent.

On a

$$(\varphi^{-1})' = (\varphi')^{-1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 217$$

102. Deux dyades φ et ψ telles que l'on a

$$\varphi\psi = \psi\varphi$$

sont dites *homologues.* Les règles de calcul des dyadiques homologues sont les règles ordinaires de l'algèbre.

Théorème III. — Le produit des inverses de deux dyadiques *homologues* est égal à l'inverse de leur produit

$$\varphi^{-1}\psi^{-1} = (\varphi\psi)^{-1} = (\psi\varphi)^{-1} \quad \text{si } \varphi\psi = \psi\varphi \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 219$$

103. *Transformation linéaire :* L'opération φ agissant sur le vecteur

$$\rho = ix + jy + kz$$

donne un vecteur σ :

$$\sigma = iX + jY + kZ,$$

et les composantes X, Y, Z s'obtiennent par une transformation linéaire

$$(a) \quad \begin{cases} X = px + qy + rz, \\ Y = p'x + q'y + r'z, \\ Z = p''x + q''y + r''z. \end{cases}$$

Déterminant de la transformation :

$$|\varphi| = \begin{vmatrix} p & q & r \\ p' & q' & r' \\ p'' & q'' & r'' \end{vmatrix}.$$

Le déterminant de la fonction *conjuguée* est

$$|\varphi'| = \begin{vmatrix} p & p' & p'' \\ q & q' & q'' \\ r & r' & r'' \end{vmatrix} = |\varphi|.$$

mais il faut remarquer qu'*il a tourné autour de la diagonale principale,* ce qui donne d'autres valeurs pour X', Y', Z', composantes de σ' 220

104. Un *tenseur* est une fonction dont le déterminant est symétrique.

Une fonction *antisymétrique* est une fonction dont le déterminant est antisymétrique.

Art. Pages.

Théorème IV. — Une transformation antisymétrique peut se mettre sous la forme

$$\varphi\rho = V\varepsilon\rho.$$

Théorème V. — Une transformation linéaire quelconque peut se mettre sous la forme de la somme d'un tenseur et d'une fonction antisymétrique

$$\varphi\rho = \left[\frac{1}{2}(\varphi + \varphi') + \frac{1}{2}(\varphi - \varphi')\right]\rho$$

ou

$$\varphi = \frac{1}{2}(\varphi + \varphi') + \frac{1}{2}(\varphi - \varphi')$$

$$= \frac{1}{2}(\varphi - \varphi') + \frac{1}{2}\operatorname{rot}\varphi \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 221$$

105. *Invariants de la transformation :* Les expressions

$$(\mathrm{I}) \quad \begin{cases} m = S\varphi\lambda\varphi\mu\varphi\nu : S\lambda\mu\nu = I_1\varphi, \\ m_1 = S(\lambda\varphi\mu\varphi\nu + \mu\varphi\nu\varphi\lambda + \nu\varphi\lambda\varphi\mu) : S\lambda\mu\nu = I_2\varphi, \\ m_2 = S(\lambda\mu\varphi\nu + \mu\nu\varphi\lambda + \nu\lambda\varphi\mu) : S\lambda\mu\nu = I_1\varphi \end{cases}$$

sont indépendantes des valeurs particulières de λ, μ, ν.

On a d'ailleurs

$$m_2 = \operatorname{div}\varphi\rho,$$

$$m = |\varphi| \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 222$$

106. *Directions principales. Cubique fondamentale :* Les directions de ρ, qui ne sont pas modifiées par l'opération φ, satisfont aux équations

$$(1) \qquad \varphi\rho = g\rho \qquad \text{ou} \qquad V\rho\varphi\rho = 0.$$

Les valeurs de g sont données par la *cubique fondamentale*

$$G = \begin{vmatrix} p - g & q & r \\ p' & q' - g & r' \\ p'' & q'' & r'' - g \end{vmatrix} = 0.$$

Théorème VI. — Les équations cubiques fondamentales en φ et φ' sont les mêmes.

Théorème VII. — La condition, pour que l'équation (1) soit satisfaite par toutes les directions d'un plan, est que l'équation $G = 0$ ait une racine *double*. Si elle a une racine *triple*, l'équation (1) est satisfaite par toutes les directions de l'espace.

Théorème VIII. — Les directions qui correspondent à deux racines *inégales* de l'équation en g sont *rectangulaires*.

Théorème IX. — L'opérateur $\varphi - g_1$ fait disparaître la composante de ρ, parallèle à la direction ρ_1, qui correspond à la racine g_1. Une fonction φ quelconque satisfait à l'*équation cubique*

$$\Phi = \varphi^3 - m_2\varphi^2 + m_1\varphi - m = 0.$$

Art. Pages.

Équation d'Hamilton résolvant le problème de l'*inversion de la fonction*

[H] $$m\varphi^{-1} = m_1 - m_2\varphi - \varphi^2.$$

Théorème X. — Les racines de la cubique fondamentale d'un tenseur sont réelles 224

107. *Résolution de l'équation vectorielle du premier degré :* On l'obtient par inversion de la fonction φ, car, de l'équation

$$\varphi\rho = \delta,$$

on tire

$$\rho = \varphi^{-1}\delta,$$

φ^{-1} s'exprime au moyen de (H).

Exemples d'application : Cas où $m = 0$ 228

108. Forme normale de la dyadique.

Théorème XI. — Une dyadique quelconque peut se mettre sous la forme

$$\varphi = ai'i + bj'j + ck'k,$$

où ijk et $i'j'k'$ sont deux triplets orthogonaux.

Théorème XII. — Dans le cas d'un tenseur on peut écrire

$$\varphi = aii + bjj + ckk \text{ ..... } 230$$

109. Une dyadique est complètement déterminée quand on connaît les trois valeurs qu'elle prend pour trois valeurs rectangulaires de ρ et elle s'écrit alors

$$\varphi = -(\sigma_i i - \sigma_j j + \sigma_k k).$$

L'équation précédente, dans le cas du tenseur, peut s'écrire aussi

$$\varphi = -(i\sigma_i - j\sigma_j + k\sigma_k).$$

On a aussi dans ce cas

$$V(i\sigma_i + j\sigma_j + k\sigma_k) = 0.$$

Lorsque φ est sous la forme du théorème XII on a

$$\varphi^{-1} = \frac{1}{a}ii + \frac{1}{b}jj + \frac{1}{c}kk \text{ ..... } 232$$

110. Note sur l'*idem*-facteur 233

C. Surface du second ordre à centre.

111. L'équation d'une surface du second ordre à centre peut s'écrire

$$S\rho\varphi\rho = 1.$$

L'équation du plan tangent au point ρ est

$$S\varpi\varphi\rho = 1.$$

Art. Pages.

La distance du centre au plan tangent ou vecteur de proximité

$$\delta = \nu^{-1} = (\varphi\rho)^{-1}.$$

Plan diamétral de la direction α. Il a pour équation

$$S\varpi\varphi\alpha = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 234$$

112. Diamètres conjugués. Plans diamétraux conjugués. Directions principales. Plans principaux rectangulaires. Axes..... 235

113. *Surfaces homothétiques*

$$S\rho\varphi\rho = h \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 239$$

114. Effet de la transformation φ. Ellipsoïde du tenseur..... 240

115. *Surfaces homofocales :*

$$S\rho(\varphi + \lambda)^{-1}\rho = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 241$$

116. *Sections circulaires :* Forme *cyclique* de l'équation

$$2S\lambda\rho\, S\mu\rho + (f - S\lambda\mu)\rho^2 = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 242$$

117. Exercices et Notes sur le Chapitre IX 244

118. Note sur l'équation (H) d'Hamilton 248

CHAPITRE X.

L'OPÉRATEUR D'HAMILTON. LE GRADIENT. DÉRIVÉE D'UN SCALAR.

119. Une fonction scalaire ou vectorielle du vecteur radial ρ s'appelle *fonction d'espace.* Hamilton appelle *nabla* le symbole

$$\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}$$

appliqué à un quaternion. ∇q est indépendant du choix des axes. 251

120. Exemples simples :

(2) $$\nabla r = \rho_0;$$

(3) $$\nabla S\alpha\rho = -\alpha;$$

(4) $$\nabla V\alpha\rho = 2\alpha \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 253$$

121. *Gradient :* Le résultat de l'opération ∇ appliquée à un scalar u s'appelle *gradient* de u :

(1) $$\nabla u = i\frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial u}{\partial y} + k\frac{\partial u}{\partial z}.$$

La propriété fondamentale du gradient s'exprime par l'équation

(2) $$du = -S\,d\rho\,\nabla u = -d\rho\,\nabla u.$$

Si l'on a

$$du = -S\lambda\,d\rho.$$

Art. Pages.

On en déduit donc

$$\nabla u = \mathrm{A}.$$

Exemples :

$$\nabla r^2 = 2\rho,$$
$$\nabla r = \rho_0.$$

Gradient d'une *fonction de fonction :*

(4) $$\nabla f(u) = f'(u)\nabla u.$$

Exemples :

$$\nabla \frac{1}{r} = -\frac{\rho_0}{r^2} = -\frac{\rho}{r^3},$$

$$\nabla \frac{1}{r^2} = -\frac{2\rho_0}{r^3} = -\frac{2\rho}{r^4} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 254$$

122. *Propriétés du gradient :* Les surfaces $u =$ const. s'appellent *surfaces de niveau.* Le vecteur ∇u leur est perpendiculaire

(2) $$\left\{\begin{aligned} \nabla(u+v) &= \nabla u + \nabla v, \\ \nabla uv &= v\nabla u + u\nabla v, \\ \nabla au &= a\nabla u, \\ \nabla du &= d\nabla u. \end{aligned}\right.$$

Gradient d'une *fonction composée* $u = f(v, w, \ldots)$:

(3) $$\nabla u = \frac{\partial f}{\partial v}\nabla v + \frac{\partial f}{\partial w}\nabla w + \ldots.$$

(4) $$\frac{\partial u}{\partial x} = -i\nabla u, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -j\nabla u, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = k\nabla u,$$

∇u donne la direction dans laquelle u varie le plus rapidement.. 256

123. *Dérivée de u dans une direction*

(1) $$\frac{du}{dr} = -\mathrm{S}\sigma_0\nabla u:$$

si l'on pose

$$\sigma_0 = is_1 + js_2 + ks_3,$$

on a

(2) $$\frac{du}{dr} = s_1\frac{\partial u}{\partial x} + s_2\frac{\partial u}{\partial y} + s_3\frac{\partial u}{\partial z},$$

ou bien, en posant

(3) $$(\sigma_0\nabla) = -\left(s_1\frac{\partial}{\partial x} + s_2\frac{\partial}{\partial y} + s_3\frac{\partial}{\partial z}\right),$$

on aura

(4) $$\frac{du}{dr} = -(\sigma_0\nabla)u = -\mathrm{S}\sigma_0\nabla u \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 257$$

124. *Intégration :* Lorsque σ est le gradient d'une fonction scalar u,

Art. Pages.

on a

$$-\int_L \sigma\, d\zeta = u_1 - u_0,$$

$\int_L$ désignant l'intégrale curviligne du vecteur σ prise le long de la courbe L. Elle ne dépend donc que des extrémités et non du chemin parcouru 260

125. *Exercices :* En posant

$$\nabla^2 q = \nabla\nabla q,$$

on a

$$\nabla^2 u = -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \text{.....} \quad 261$$

CHAPITRE XI.

APPLICATION DE ∇ A UN VECTEUR. DIVERGENCE ET CURL.

126. En appliquant l'opérateur ∇ au vecteur d'espace

(1) $$\sigma = iX + jY + kZ,$$

on trouve

(2) $$\nabla q = -\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) + i\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) + j\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) + k\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right).$$

On pose

(5) $$\operatorname{div}\sigma = -S\nabla\sigma = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$$

(lire *divergence* σ),

(6) $$\operatorname{rot}\sigma = V\nabla\sigma$$

(lire *tourbillon* σ ou *curl* σ).

De sorte que

(7) $$\nabla\sigma = -\operatorname{div}\sigma + \operatorname{rot}\sigma.$$

On peut écrire symboliquement

(4) $$\operatorname{rot}\sigma = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix},$$

∇ étant regardé comme un vecteur symbolique dont les composantes scalaires sont $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ 263

127. *Calcul de* div *et de* rot : On calcule les expressions où entrent div ou rot, en regardant ∇ comme un vecteur et appliquant les règles du calcul des vecteurs (*cf.* Note n° 133).

Art. Pages.

On a les formules

$$\operatorname{div}(\sigma + \tau) = \operatorname{div}\sigma + \operatorname{div}\tau,$$
$$\operatorname{rot}(\sigma + \tau) = \operatorname{rot}\sigma + \operatorname{rot}\tau,$$
$$\operatorname{div} V\sigma\tau = \operatorname{div}_\sigma V\sigma\tau + \operatorname{div}_\tau V\sigma\tau,$$
$$\operatorname{rot} V\sigma\tau = \operatorname{rot}_\sigma V\sigma\tau + \operatorname{rot}_\tau V\sigma\tau,$$

(2) $$\operatorname{div} V\alpha\sigma = S\alpha \operatorname{rot}\sigma,$$

(3) $$\operatorname{rot} V\alpha\sigma = \alpha \operatorname{div}\sigma + (\alpha\nabla)\sigma,$$

α étant un vecteur *constant*.

L'expression $(\alpha\nabla)$ étant définie par

(5) $$(\alpha\nabla) = -\left(a_1\frac{\partial}{\partial x} + a_2\frac{\partial}{\partial y} + a_3\frac{\partial}{\partial z}\right) \quad \text{si } \alpha = a_1 i + a_2 j + a_3 k,$$

(6) $$\operatorname{div} m\sigma = m \operatorname{div}\sigma - S\sigma\nabla m,$$

(7) $$\operatorname{rot} m\sigma = m \operatorname{rot}\sigma - V\sigma\nabla m,$$

(8) $$\operatorname{rot} V\rho\sigma = \rho \operatorname{div}\sigma - (\rho\nabla)\sigma - 2\sigma.$$

On a, quel que soit α, la formule

(5b) $$(\alpha\nabla)\rho = -\alpha \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$ 26[illegible]

128. *Dérivée d'un vecteur* par rapport à un *scalar dans une direction :*

On a

(1) $$\frac{d\sigma}{dn} = D_{\alpha_0}\sigma = -i(\alpha_0\nabla)X - j(\alpha_0\nabla)Y - k(\alpha_0\nabla)Z$$

ou

(1) $$\frac{d\sigma}{dn} = -(iS\alpha_0\nabla X + jS\alpha_0\nabla y + kS\alpha_0\nabla Z),$$

qui s'écrit symboliquement

(2) $$\frac{d\sigma}{dn} = -(\alpha_0\nabla)\sigma.$$

Si α *est unitaire*, on a

$$\frac{d\sigma}{dn} = D_\alpha\sigma,$$

en supposant que le déplacement est

$$PP' = \alpha\, dn;$$

Si α *n'est pas unitaire*, on a

$$\frac{d\sigma}{dn} = T\alpha . D_\alpha\sigma \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$ 266

129. *Différentielle totale d'un vecteur :* Supposons que le point d'application du vecteur d'espace σ, qui dépend de ρ et de t, se déplace dans la direction ε de la quantité infinitésimale $\varepsilon\, dt$, on a

(1) $$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\partial\sigma}{\partial t} - (\varepsilon\nabla)\sigma,$$

(1') $$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} - (\varepsilon\nabla)u.$$

Art. Pages.

Pour le vecteur ε lui-même on a

(2) $$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\partial\varepsilon}{\partial t} - (\varepsilon\nabla)\varepsilon.$$

En remarquant que l'on a

(3) $$\nabla(\alpha\sigma) = \nabla S\alpha\sigma = (\alpha\nabla)\sigma - V\alpha \operatorname{rot}\sigma,$$

(4) $$\nabla(\sigma\tau) = (\sigma\nabla)\tau + (\tau\nabla)\sigma - V\sigma \operatorname{rot}\tau - V\tau \operatorname{rot}\sigma.$$

On transforme (2) en

(6) $$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\partial\varepsilon}{\partial t} - \frac{1}{2}\nabla\varepsilon^2 - V\varepsilon \operatorname{rot}\varepsilon.$$

I. *Le curl d'un gradient est identiquement nul :*

$$\operatorname{rot}\nabla = 0.$$

II. *La divergence d'un curl est identiquement nulle :*

$$\operatorname{div}\operatorname{rot} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 267$$

130. *Opérateur* ∇^2 : Il est défini par l'équation

(2) $$\nabla^2 = \nabla\nabla,$$

et l'on a

(1) $$\nabla^2 = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right).$$

Pour un scalar,

(3) $$\nabla^2 u = -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right);$$

Pour un vecteur,

(4) $$\nabla^2\sigma = -\nabla \operatorname{div}\sigma + \operatorname{rot}^2\sigma;$$

Pour un scalar

(5) $$\nabla^2 u = -\operatorname{div}\nabla u.$$

On a les formules

(6) $$\nabla^2 r = -\frac{2}{r},$$

(7) $$\nabla^2\frac{1}{r} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 269$$

131. *Définition absolue* de ∇ d'après von Ignatowski 270

132. Interprétation des opérateurs ∇, div, rot.

La divergence d'un vecteur correspond à la notion de débit d'une source. *Le curl* ou rotor *de la vitesse d'un point quelconque d'un solide à un instant donné est le double de la vitesse angulaire de rotation du solide autour de son axe à cet instant.* Si $\varepsilon = \varepsilon_0 + V\Omega\rho$, on a

$$\operatorname{rot}\varepsilon = 2\Omega.$$

Art. Pages.

Notion du *vecteur tourbillon* 272

133. Exercices et Note. Note sur l'emploi de ∇ en le faisant entrer dans les calculs comme un vecteur symbolique..... 275

134. Exercices divers (à noter)..... 276

VII. Le *curl d'un tenseur est* identiquement nul :

$$\operatorname{div} \varphi = m_2,$$
$$\operatorname{rot} \varphi = 2\varepsilon;$$

d'où

$$\nabla \varphi = -m_2 + 2\varepsilon \text{.....} \quad 277$$

CHAPITRE XII.

INTÉGRALES MULTIPLES.

135. Rappel des définitions de l'analyse. Intégrale double. Intégrale triple. Points, lignes et surfaces de discontinuité. Méthode des discontinuités. Son principe..... 281

136. *Théorème.* — Si, pour tous les points *extérieurs* à un cercle fixe de rayon r_0, on a

$$\operatorname{mod} f(x, y) = \frac{A}{r^\alpha},$$

r étant la distance du point au centre du cercle, et A une constante, α un exposant *supérieur à deux*, l'intégrale

$$\int\int \operatorname{mod} f(x, y)\, dS$$

est finie dans un champ infini quelconque.

Théorème. — Si, pour tous les points *intérieurs* à un cercle de rayon r_0 ayant son centre au point de discontinuité, on a

$$\operatorname{mod} f(x, y) \leqq \frac{A}{r^\alpha},$$

r étant la distance du point x, y au centre C_0, A une constante, et α un nombre < 2, l'intégrale

$$\int\int \operatorname{mod} f(x, y)\, dS$$

est finie dans un champ quelconque entourant le point C_0.

On a deux théorèmes semblables dans le cas des intégrales *triples*, mais, dans ce cas, $\alpha >$ ou < 3, au lieu de $>$ ou < 2 283

137. Intégrales vectorielles ou scalaires 284

138. *Définitions : Flux élémentaire :*

$$d\Phi = -n\sigma\, dS.$$

Flux *total* du vecteur :

$$\sigma = \Phi = -\int_S n\sigma\, dS,$$

Arts. Pages

n désigne la normale *intérieure* à la surface S. Φ est alors le *flux total entrant* dans l'unité de temps 285

139. *Théorème de la divergence :* L'intégrale de la divergence d'un vecteur à l'intérieur d'un volume V est égale au flux total *sortant* de ce vecteur par la surface qui limite le corps

(1) $$\int_V \operatorname{div} \sigma \, dV = \int_S n \sigma \, dS.$$

Normale *n intérieure.*

Expression cartésienne :

(2) $$\int_V \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) dV + \int_S (X \cos\alpha + Y \cos\beta + Z \cos\gamma) \, dS = 0.$$

Le théorème s'étend au cas où l'on remplace σ par $\frac{\sigma}{r}$:

(3) $$\int_V \operatorname{div} \frac{\sigma}{r} \, dV = \int_S n \frac{\sigma}{r} \, dS$$ 286

140. *Théorème du gradient :* Normale *n intérieure :*

(1) $$\int_V \nabla u \, dV = - \int u n \, dS,$$

(2) $$\int_V \nabla \frac{u}{r} \, dV = - \int n \frac{u}{r} \, dS.$$

Expressions cartésiennes :

(3) $$\int_V \frac{\partial u}{\partial x} \, dV + \int_S u \cos\alpha \, dS = 0,$$

(4) $$\int_V \frac{\partial \frac{u}{r}}{\partial x} \, dV + \int_S \frac{u}{r} \cos\alpha \, dS = 0$$ 289

141. *Théorème du curl :* Normale *intérieure :*

(1) $$\int_V \operatorname{rot} \sigma \, dV = \int_S V \sigma n \, dS;$$

on a aussi

(2) $$\int_V \operatorname{rot} \frac{\sigma}{r} \, dV = \int_S \frac{V \sigma n}{r} \, dS.$$

Expression cartésienne :

$$\int_V \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial Z} \right) dV = \int_S (Y \cos\gamma - Z \cos\beta) \, dS$$ 289

Art. Pages.

142. *Définitions :* La *circulation* d'un vecteur le long d'un contour L est l'intégrale

$$C = -\int_L \sigma\, d\rho.$$

Diaphragmes. Espaces cycliques, acycliques. Cloisons..... 290

143. *Théorème de Stokes :* La circulation d'un vecteur σ le long d'un contour fermé L, tracé dans un espace *acyclique* est égale au flux du vecteur tourbillon de σ à travers un diaphragme quelconque passant par L

$$(1) \qquad \int_L S\sigma\, d\rho = \int_S S\, n \operatorname{rot} \sigma\, dS.$$

Expression cartésienne :

$$(2) \qquad \int_L (X\, dx + Y\, dy + Z\, dz) = \int_S \left[\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)\cos(n, x) + \ldots\right] dS.$$

Cas particulier. *Formule de Riemann :*

$$(3) \qquad \int X\, dx + Y\, dy = \int \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) dS \ldots\ldots\ldots\ldots$$ 292

144. Corollaires du théorème de Stokes :

I. Le flux de la rotation d'un vecteur *à travers une surface fermée est nul.*

II. L'intégrale curbe d'un vecteur *le long d'une courbe fermée est nulle* lorsque $\operatorname{rot}\sigma = 0$. En particulier,

$$\int \nabla u\, d\rho = 0.$$

III. Si un vecteur d'espace est dérivé d'un potentiel scalar, on a, sur une surface fermée S,

$$\int_S V\sigma n\, dS = 0.$$

IV. *Circulation d'un scalar :*

$$(a) \qquad \varepsilon = -\int_L u\, d\rho = \int_S V n \nabla u\, dS.$$

Sur une surface fermée on a

$$(b) \qquad \int V n \nabla u\, dS = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$ 294

145. *Champ potentiel :* Le champ potentiel est caractérisé par

$$\sigma = \nabla u \qquad \text{ou} \qquad \operatorname{rot}\sigma = 0.$$

Art. Pages.

Réciproquement, dans un espace *acyclique*, l'intégrale de l'équation

$$\operatorname{rot} \sigma = 0,$$

est

$$\sigma = \nabla u.$$

Dans un champ potentiel, on a,

$$(a) \qquad \int_V \nabla^2 u \, dV = \int_S \frac{du}{dn} \, dS = 0.$$

S étant une surface de niveau quelconque 296

146. Le champ potentiel considéré comme un *champ de sources*. Soit posé

$$\operatorname{div} \sigma = 4\pi m.$$

On a les relations

$$(1) \qquad \sigma = \nabla u = \int \frac{m\rho}{r^3} \, dV,$$

$$(2) \qquad u = -\int \frac{m \, dV}{r},$$

$$(3) \qquad 4\pi m = \operatorname{div} \sigma = -\nabla^2 u.$$

Cette dernière (ou *équation de Poisson*) admet donc (2) comme intégrale 298

147. *Champ tourbillonnaire* : Un champ à divergence nulle peut être regardé comme formé par les tourbillons d'un autre champ. L'équation

$$(1) \qquad \operatorname{rot} W = \sigma$$

peut être satisfaite en posant

$$(2) \qquad W = \operatorname{rot} \mu.$$

On trouve

$$(3) \qquad \mu = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\sigma \, dV}{r} \qquad \text{avec } \operatorname{div} \mu = 0,$$

ce qui donne la solution particulière

$$W_1 = \operatorname{rot} \mu = -\frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \int \frac{\sigma \, dV}{r}.$$

Dans un champ tourbillonnaire ($\operatorname{div} \sigma = 0$), le flux du vecteur à travers une surface continue quelconque limitée à un contour ne dépend que de ce contour; elle s'exprime par une intégrale simple prise le long du contour 300

148. *Potentiel vectoriel* : On suppose, connue en chaque point d'un champ tourbillonnaire ($\operatorname{div} \sigma = 0$), la valeur du vecteur tourbillon

$$(1) \qquad W = \operatorname{rot} \sigma.$$

Art. Pages.

Il s'agit de trouver le vecteur de champ. On obtient par (127) une solution

$$\sigma = \operatorname{rot} \mu.$$

(2) $$\mu = -\int \frac{w\,dV}{r} \quad \text{avec } \operatorname{div} \mu = 0,$$

analogue à (2) de (126) où les sources $4\pi m$ sont remplacées par les tourbillons $4\pi w$. La fonction μ est le *potentiel vectoriel*. On a respectivement :

Pour le cas potentiel scalaire,

$$4\pi m = -\nabla^2 u;$$

Pour le cas potentiel vectoriel,

$$4\pi w = -\nabla^2 \mu.$$

Gibbs pose

$$u = \operatorname{pot} m, \qquad \mu = \operatorname{pot} W,$$

de sorte que

$$\operatorname{pot} = -\int \frac{(\quad)\,dV}{r} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 302$$

149. *Variation de la circulation et du flux :* On a pour la *circulation*, lorsque σ dépend de la variable scalar t :

(1) $$\frac{dC}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_L \sigma\,d\varrho = -\int_L \left[\frac{\partial\sigma}{\partial t} - (\varepsilon\nabla)\sigma\right] d\varrho.$$

où ε doit être regardé comme constant, ou

(2) $$\frac{dC}{dt} = -\int \left(\frac{\partial\sigma}{\partial t} - \nabla(\varepsilon\sigma) - V\varepsilon \operatorname{rot}\sigma\right) d\varrho.$$

Si la courbe L est fermée,

(3) $$\frac{dC}{dt} = -\int \left(\frac{\partial\sigma}{\partial t} - V\varepsilon \operatorname{rot}\sigma\right) d\varrho.$$

Pour le *flux* à travers une surface S, on trouve

(4) $$\frac{d\Phi}{dt} = -\int_S \left(\frac{\partial\sigma}{\partial t} + \varepsilon \operatorname{div}\sigma - \operatorname{rot} V\sigma\varepsilon\right) n\,dS.$$

Dans le cas d'un *scalar u*, on a, si la surface S est fermée,

(5) $$\frac{d}{dt}\int_V u\,dV = \int_V \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div} u\varepsilon\right) dV.$$

On en déduit, dans le cas d'une surface fermée,

(7) $$\frac{d\Phi}{dt} = \int_V \left(\operatorname{div}\frac{\partial\sigma}{\partial t} + \varepsilon \operatorname{div}\sigma\right) dV$$

ou

(8) $$\frac{d\Phi}{dt} = \int_V \left[\frac{\partial \operatorname{div}\sigma}{\partial t} + \operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{div}\sigma)\right] dV \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 304$$

Art. Pages.

150. *Formules de Green :* u et v étant des fonctions *régulières* dans le volume V, on a les formules

$$(1)\qquad \int u\nabla^2 v\,dV + \int \nabla u\,\nabla v\,dV = -\int un\,\nabla v\,dS,$$

$$(2)\qquad \int (u\nabla^2 v - v\nabla^2 u)\,dV = \int \left(u\frac{dv}{dn} - v\frac{du}{dn}\right) dS$$

(1re *formule de Green*);

$$(3)\qquad \int [u\nabla^2 u + (\nabla u)^2]\,dV = \int u\frac{du}{dn}\,dS.$$

Si u est une fonction *harmonique*, on a les deux formules

$$(4)\qquad \int (\nabla^2 u)^2\,dV = \int u\frac{du}{dn}\,dS.$$

$$(5)\qquad \int \frac{du}{dn}\,dS = 0 \quad \text{ou} \quad \int n\,\nabla u\,dS = 0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 305$$

151. La deuxième formule de Green se rapporte à un point intérieur au volume V, u_0 étant la valeur en ce point de la fonction supposée *harmonique* et *régulière*, on a

$$(g)\qquad \int \left(u\frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{1}{r}\frac{du}{dn}\right) dS = 4\pi u_0.$$

Remarque : On peut, dans la formule 150 (1), remplacer u par $\frac{u}{r}$:

$$(6)\qquad \int_V \left(\frac{u}{r}\nabla^2 v + \nabla\frac{u}{r}\nabla v\right) dV = -\int \frac{u}{r}\,n\,\nabla v\,dS = \int \frac{u}{r}\frac{dv}{dn}\,dS \ \ldots\ldots \quad 307$$

152. *Discontinuités :* Dans le cas des discontinuités, le long d'une surface, la *divergence devient infinie* en chaque point de la surface, mais le produit de la divergence par la distance des surfaces isolantes introduites par l'emploi de la méthode des discontinuités reste fini. Densité superficielle.

Dans l'application du *théorème de Stokes*, il faut ajouter au second membre une intégrale de ligne provenant des composantes tangentielles du vecteur de champ sur la surface de discontinuité. Dans l'application du *théorème de la divergence*, il faut ajouter au second membre une intégrale de surface prise sur la surface de discontinuité des composantes normales du vecteur de champ sur cette surface 308

153. Remarques générales. Notations diverses 312

154. Exercices 313

CHAPITRE XIII.

POTENTIELS NEWTONIENS.

Art. Pages.

155. Potentiel de volume :

$$F = \int_V \mu\, dV \nabla_A \frac{1}{r} = \nabla_A u,$$

en posant

$$u = \int \frac{\mu\, dV}{r} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 315$$

156. Cas d'un point attiré intérieur au volume V.
Équation de Poisson :

$$\nabla^2 u = 4\pi\mu_0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 316$$

157. Calcul de l'attraction. Cas d'un solide isotrope de révolution. Attraction d'une sphère sur un point extérieur..... 319

158. Potentiel de surface..... 321

159. Potentiel de double couche. Artifice du feuillet. Intégrale de Gauss..... 322

CHAPITRE XIV.

MOUVEMENT D'UN SOLIDE AUTOUR D'UN POINT FIXE.

160. Moments d'inertie axiaux :

$$I = -\Sigma m V^2 \alpha\rho = S\alpha\varphi\alpha,$$

en posant

$$\varphi\alpha = \Sigma m \rho V \rho\alpha.$$

Ellipsoïde d'inertie :

$$S\varpi\varphi\varpi = 1.$$

Axes principaux d'inertie. Ellipsoïde central. Théorème de Steiner. 327

161. Mouvement autour d'un point fixe. Équation d'Euler..... 328

162. Mouvement de Poinsot.
Expression de la force vive. Ellipsoïde des forces vives.
Les deux représentations géométriques du mouvement de Poinsot. 330

163. Mouvement de la toupie..... 332

164. Mouvement d'un point à la surface de la Terre..... 335

165. Mouvement d'un solide traité par la considération des mouvements relatifs. Mouvements de précession et de nutation..... 337

166. Lieu des axes de rotation. Équation d'Hamilton..... 342

CHAPITRE XV.

NOTIONS SUR LA THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ.

Art. Pages.

167. Définitions. Tension élémentaire en un point. Pression 344

168. Tension tangentielle. Hypothèses admises..... 345

169. Théorème fondamental de Cauchy. Équilibre du tétraèdre élémentaire. La tension en un point est une fonction autoconjuguée de la normale unité n..... 345

170. Équations indéfinies de l'équilibre. Surface des tensions. Ellipsoïde de Lamé..... 347

171. Déplacement général d'un système de points 350

172. Décomposition du déplacement en trois éléments : une translation, une rotation et une déformation pure.
Déformations élémentaires. Dilatation linéaire. Glissements élémentaires.
Surface des dilatations. Dilatations principales..... 351

173. Dilatation cubique $\theta = \operatorname{div}\sigma$..... 353

174. Relations entre les tensions et les déplacements. Cas d'un solide homogène et isotrope. Paramètres λ et μ de *Lamé*. Constantes d'isotropie..... 355

175. *Tension sur un plan quelconque*..... 357

176. Équations de l'équilibre et du mouvement intérieurs pour les corps *isotropes*. Équation indéfinie. Équation à la surface. Cas où les déplacements dérivent d'un potentiel. Dans ce cas, l'équilibre exige simplement que la dilatation cubique soit constante..... 359

Exemples d'équilibre.

177. Compression normale et uniforme 361

178. Extension longitudinale d'un prisme..... 361

179. Équilibre d'une couche sphérique..... 362

180. Équilibre d'une couche cylindrique..... 363

181. Équilibre de torsion d'un cylindre..... 364

182. Application aux *fluides*..... 368

183. Équation du mouvement. Cas d'un potentiel des vitesses. Théorème d'Helmholtz..... 369

184. Mouvement stationnaire. Théorème de Bernoulli..... 372

185. Exercices..... 372

CHAPITRE XVI.

APPLICATION A LA THÉORIE ÉLECTROMAGNÉTIQUE DE LA LUMIÈRE.

Art. Pages.

186. Rappel de définitions. Champ électrique. Constante diélectrique. Polarisation diélectrique :

$$\mathfrak{D} = k\mathcal{E}.$$

Induction magnétique. Perméabilité magnétique :

$$\mathfrak{B} = \mu\mathcal{H}.$$

Équations de Maxwell :

$$\frac{k}{V}\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \operatorname{rot}\mathcal{H},$$

$$\frac{\mu}{V}\frac{d\mathcal{H}}{dt} = -\operatorname{rot}\mathcal{E} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 375$$

187. Premières conséquences des équations de Maxwell :

$$\frac{k\mu}{V^2}\frac{\partial^2\mathcal{E}}{\partial t^2} = -\nabla^2\mathcal{E},$$

$$\frac{k\mu}{V^2}\frac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial t^2} = -\nabla^2\mathcal{H} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 376$$

188. Propagation par ondes planes 376

189. Mouvements intérieurs dans un milieu isotrope.
Un vecteur de champ peut toujours se décomposer *en une partie solénoïdale* et *une partie non tourbillonnaire*.
Ondes de condensation. Ondes de distorsion 379

190. Ondes planes. Longueur d'onde. Durée de vibration. Période. Vitesse de propagation de l'onde 381

191. Calcul de la vitesse de propagation. Cas des ondes de condensation.
La vibration est perpendiculaire au plan de l'onde. Ondes longitudinales.
Cas des ondes de distorsion. Les ondes sont transversales 383

192. Vibrations harmoniques 384

193-195. Double réfraction. Théorie élémentaire 386

PRÉCIS

DE

CALCUL GÉOMÉTRIQUE

CHAPITRE I.

NOTIONS GÉNÉRALES SUR LES NOMBRES COMPLEXES.

1. Le lecteur qui, nous le supposons, connaît les éléments de l'Algèbre, a rencontré dans la résolution des équations du second degré des expressions de la forme

$$z = x + y\sqrt{-1},$$

que l'on appelait nombres ou quantités *imaginaires* et qui possèdent la propriété suivante. Si deux de ces quantités sont égales entre elles, c'est-à-dire si l'on a

$$x + y\sqrt{-1} = x' + y'\sqrt{-1},$$

x, y, x', y' étant des quantités quelconques positives ou négatives, on en déduit

$$x = x', \qquad y = y',$$

de sorte que l'équation

$$x + y\sqrt{-1} = 0$$

entraîne les deux équations

$$x = 0, \qquad y = 0.$$

Hamilton d'une part, et Grassmann de l'autre, ont indépendamment et à peu près à la même époque, vers 1840, eu l'idée d'étendre la notion ainsi acquise de nombre complexe à des combinaisons linéaires d'unités quelconques. Nous résumons ci-après, principalement d'après le premier Chapitre de A_2 (1 à 36), les notions essentielles qui nous seront utiles à ce sujet.

2. **Définitions.** — Une grandeur a est dite *numériquement dépendante* d'autres grandeurs b, c, ... lorsque l'on a

$$a = xb + yc + \ldots,$$

où x, y, ... sont des nombres réels quelconques. On exprime le même fait en disant qu'il existe une *relation numérique* entre a, b, c, ... ou encore que a, b, c, ... sont en *dépendance numérique*.

Lorsque deux grandeurs a et b sont en relation numérique, sans que l'une d'entre elles soit nulle, on a donc

$$a = xb.$$

On dit alors que les grandeurs a et b sont *congruentes* et l'on écrit

$$a \equiv b$$

qui se prononce a congruent à b.

On appelle *unité* une grandeur qui peut servir à en déduire numériquement une série d'autres grandeurs. Une unité est dite *primitive* quand on ne peut pas la dériver numériquement d'une autre unité. L'unité des nombres réels, c'est-à-dire le nombre *un* s'appelle unité *absolue*. Tout autre unité est une unité *relative* (A_2, 3).

On appelle *système d'unités* un ensemble de grandeurs *numériquement indépendantes* (c'est-à-dire entre lesquelles il n'existe pas de relation numérique) et dont on peut déduire d'autres grandeurs au moyen de nombres réels quelconques.

Par exemple, les grandeurs 1 et $\sqrt{-1}$ forment un système d'unités dont on peut déduire tous les nombres imaginaires de l'algèbre ordinaire et de la forme $x + y\sqrt{-1}$, où x et y sont des quantités réelles.

Si, de même, on a n unités indépendantes $e_1, e_2, \ldots, e_n$ formant un système d'unités, on pourra en obtenir des grandeurs telles que

$$a = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n.$$

Une grandeur qui *peut* s'obtenir par dépendance numérique des unités *primitives* est dite *grandeur du premier degré* [1]. Par exemple, si l'on considère encore le système d'unités 1 et $\sqrt{-1}$, les nombres réels et les quantités imaginaires de la forme $x + y\sqrt{-1}$, où x et y sont des nombres réels, sont des grandeurs du premier degré, relativement à ce système d'unités.

---

[1] On dit aussi, dans ce cas, que cette grandeur est un *nombre complexe* du système des unités $e_1, \ldots, e_n$ ou simplement un *nombre* de ce système.

3. **Par définition**, *l'addition* et *la soustraction* de deux grandeurs qui dépendent du même système d'unités s'opère en additionnant ou en retranchant les coefficients correspondants. Ainsi, si l'on a

$$a = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n,$$
$$b = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \ldots + y_n e_n,$$

on aura, *par définition*,

$$a + b = (x_1 + y_1) e_1 + (x_2 + y_2) e_2 + \ldots,$$
$$a - b = (x_1 - y_1) e_1 + (x_2 - y_2) e_2 + \ldots.$$

Les règles relatives à l'addition et à la soustraction des nombres complexes ne diffèrent pas de celles du Calcul algébrique ordinaire.

4. **Par définition,** *la multiplication* ou *la division* d'un nombre complexe *par un nombre réel* (qui doit être différent de zéro dans le cas de la division) s'effectue en multipliant ou divisant par ce nombre les coefficients des unités qui y entrent, c'est-à-dire que si l'on a

$$a = \Sigma x_i e_i,$$

on aura, *par définition*,

$$ma = \Sigma (m_i x_i) e_i$$

et

$$\frac{a}{m} = \sum \frac{x_i}{m} e_i \qquad \text{où} \qquad m \neq 0.$$

Il est clair que l'on a

$$am = \Sigma (x_i m) e_i = ma,$$

c'est-à-dire que l'on peut intervertir l'ordre des facteurs et que l'équation

$$ma = 0$$

entraîne soit $m = 0$, soit $a = 0$.

On déduit de là que si les deux nombres a et b (n° 3) sont *égaux*, on a

$$(x_1 - y_1) e_1 + (x_2 - y_2) e_2 + \ldots = 0,$$

mais $e_1, e_2, \ldots$ étant numériquement indépendants, ceci exige que l'on ait

$$x_1 = y_1, \qquad x_2 = y_2, \qquad \ldots \qquad x_n = y_n.$$

5. **Définitions.** — L'ensemble des grandeurs que l'on peut obtenir par dépendance numérique de n grandeurs $a, b, \ldots$ s'appelle *le*

domaine dépendant de ces grandeurs ou le domaine des grandeurs a, b, ... Si chacune des grandeurs a, b, ... est du *premier degré*, c'est-à-dire est numériquement dépendante de n unités primitives, on dit que le domaine est *de degré n*, à *condition toutefois que le domaine ne puisse pas s'obtenir avec moins de n de ces unités*. Un domaine qui ne contient aucune grandeur en dehors de zéro est dit un domaine de *degré nul* (Grassmann, A_2, **14**).

On dit que deux domaines sont *identiques* lorsque toute grandeur appartenant à l'un appartient à l'autre et réciproquement.

Par exemple, considérons encore, pour fixer les idées, les unités primitives 1 et $\sqrt{-1}$. L'ensemble des nombres réels forme un domaine du premier degré, car ces nombres sont tous numériquement dépendants d'une seule unité qui est l'unité absolue, c'est-à-dire le nombre *un*. Au contraire, l'ensemble des nombres imaginaires de la forme $x + y\sqrt{-1}$ forme un domaine du deuxième degré, parce qu'on ne peut pas les former tous sans avoir recours aux deux unités primitives 1 et $\sqrt{-1}$.

On a le théorème fondamental suivant :

Tout domaine du $n^{\text{ième}}$ degré peut être considéré comme numériquement dépendant de n quantités arbitraires du premier degré de ce domaine pourvu que celles-ci soient numériquement indépendantes.

C'est-à-dire que si nous considérons le domaine du second degré des nombres complexes $x + y\sqrt{-1}$ par exemple, ce domaine est numériquement dérivable de deux quelconques d'entre eux, a et b, numériquement indépendants ou, en d'autres termes, qu'il existe toujours deux nombres x' et y' réels satisfaisant à la condition d'identité

$$x - y\sqrt{-1} = x'a + y'b,$$

où l'on a

$$a = x_1 + y_1\sqrt{-1},$$
$$b = x_2 + y_2\sqrt{-1}.$$

Cela résulte, en effet, de ce que a et b étant numériquement indépendants, le déterminant

$$x_1 y_2 - x_2 y_1$$

a une valeur différente de zéro. Il n'est pas difficile de généraliser cette démonstration dans le cas d'un plus grand nombre d'unités.

Ce théorème, ainsi que le fait remarquer Grassmann (A_2, 24, *Remarque*), fait disparaître toute différence spécifique essentielle entre les unités fondamentales $e_1, \ldots, e_n$ et les nombres qui en dépendent numériquement, en ce que les domaines de ces unités et de n de ces nombres, choisis de manière qu'ils soient numériquement indépendants, étant les mêmes, on peut remplacer les unes par les autres, en les prenant indifféremment comme unités.

Remarques. — I. Il importe de ne pas confondre la notion de *degré d'un domaine*, qui dépend du nombre d'unités primitives au moyen duquel on peut exprimer tous les nombres complexes de ce domaine et celle de *degré d'une grandeur;* cette dernière notion dépend de considérations différentes et a rapport à des propriétés de la multiplication des unités (*voir* ci-après, n° 6).

II. Il résulte des définitions du n° 4 que la multiplication et la division des nombres complexes par des nombres réels suivent les règles ordinaires du calcul algébrique. En particulier, lorsque *deux* grandeurs sont numériquement dépendantes ou congruentes (n° 2), ces grandeurs étant d'ailleurs différentes de zéro, nous entendrons par quotient de b par a, ou $\frac{b}{a}$, le nombre qui permet de dériver b numériquement de a, c'est-à-dire que nous posons

$$\frac{b}{a} = \frac{xa}{a} = x,$$

si $b = xa$ et $a \neq 0$.

On peut aussi, dans un produit de deux facteurs, au lieu de multiplier ce produit par un nombre, multiplier l'un des facteurs par ce nombre et inversement (Grassmann, A_2, 40), c'est-à-dire

$$x(ab) = (xa)b = a(xb),$$

le signe de la multiplication n'étant pas représenté ici.

6. **Multiplication complexe : Produit de deux grandeurs.** — Nous appellerons *produit de deux grandeurs* a et b dépendant numériquement chacune de n unités $e_1, \ldots, e_n$,

$$a = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n,$$
$$b = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \ldots + y_n e_n,$$

le résultat obtenu en multipliant entre elles, *dans l'ordre où elles sont placées*, les unités dont a et b sont numériquement dépendantes et affectant les produits de ces unités d'un coefficient obtenu en mul-

tipliant entre eux les coefficients de ces unités, puis faisant la somme de tous les résultats ainsi formés. C'est-à-dire que l'on a, en adoptant provisoirement pour signe de multiplication le signe 0^-, par exemple

$$a\,0^-\,b = \Sigma x_i y_j e_i\,0^-\,e_j,$$

les produits partiels $e_i 0^- e_j$ *ne pouvant pas être intervertis* (Hamilton et Grassmann).

Par exemple, d'après cette définition, si a et b sont des nombres d'un domaine du second degré et $e_1 e_2$ les unités du domaine

$$a = x\,e_1 + y\,e_2,$$
$$b = x'e_1 + y'e_2,$$

on aura

$$a\,0^-\,b = xx'e_1e_1 + xy'e_1e_2 + yx'e_2e_1 + yy'e_2e_2.$$

On voit que le produit de deux grandeurs appartenant à un domaine de degré n dépendra de n^2 produits des unités primitives entre elles. Ces produits sont dits du *deuxième ordre* [1] et $a\,0^-\,b$ est une grandeur du *deuxième ordre*. Suivant les conventions, d'ailleurs en partie arbitraires, que l'on établira entre les produits tels que e_ie_j et les unités primitives ou entre ces produits eux-mêmes, on obtiendra des multiplications différentes. Le Calcul vectoriel dont nous avons à nous occuper peut alors procéder de deux ordres d'idées tout à fait différents et dont les principes sont les suivants :

7. **Principe du calcul des quaternions** (Hamilton). — On admettra que *le produit* $a\,0^-\,b$ est un nombre du domaine *des unités primitives*. Il en résulte (n° 5) que le produit doit pouvoir s'exprimer au moyen des unités du système, c'est-à-dire comme un nombre du système. La notion de l'*ordre ou degré du produit disparaît*, on ne conserve que celle du *degré* du domaine. D'après cela, comme un nombre du système s'exprime, ainsi que nous le verrons, au moyen de quatre unités dont l'une est 1 et dont les trois autres sont des unités complexes i, j, k, on aura, dans le *calcul des quaternions*,

$$a = w + x\,i + y\,j + z\,k,$$
$$b = w' + x'i + y'j + z'k$$

et

$$a\,0^-\,b = w_1 + x_1 i + z_1 k + y_1 j,$$

---

[1] Ou du *deuxième degre* (*cf.* n° 5, *Remarque* I).

et il restera à fixer les règles permettant d'obtenir les nombres w_1, x_1, y_1, z_1, en fonction des nombres w, x, y, z et w', x', y', z' pour que la multiplication quaternionienne soit parfaitement définie. Ces règles découleront d'ailleurs directement des relations que l'on établira entre les unités primitives et les neuf produits

$$ii, \quad jj, \quad kk, \quad ij, \quad ji, \quad ik, \quad ki, \quad jk, \quad kj,$$

règles particulièrement simples dans le système hamiltonien (*voir* n° 52, équation A).

8. **Principe du calcul de l'étendue** (*Ausdehnungslehre*, Grassmann). — Le principe est ici tout à fait différent en ce que Grassmann admet, non seulement que le domaine du produit et celui des unités primitives ne sont pas les mêmes, mais encore que ces grandeurs ne *sont pas de même ordre* et que, par conséquent, *on ne peut pas les faire dépendre linéairement des mêmes unités*.

Grassmann est donc amené à considérer un produit tel que $a0^- b$ comme dépendant de nouvelles unités du *deuxième ordre*, entre lesquelles il est permis d'ailleurs d'établir un certain nombre de relations arbitraires. Nous indiquons plus loin (n° 39) celles que Grassmann a adoptées dans un cas particulier.

Il serait prématuré, en cet endroit, de faire une comparaison entre les deux systèmes, mais on peut déjà présumer que celui d'Hamilton sera *plus simple*, tandis que celui de Grassmann aura l'avantage de la *plus grande généralité*. Nous verrons que, dans la pratique, c'est le système d'Hamilton un peu déformé qui a prévalu sous le nom de *Calcul vectoriel*. Pour certaines questions, cependant, le système grassmannien présente de tels avantages que son emploi s'impose de préférence à tout autre. Notre Précis a pour but de donner de chacune de ces deux méthodes une connaissance suffisante pour que le lecteur puisse en tirer le meilleur parti, soit dans ses travaux personnels, soit dans la lecture des Ouvrages, maintenant de plus en plus nombreux, où se trouve adopté l'un ou l'autre des systèmes qui en dérivent. Nous nous limitons toutefois à leur application à l'espace géométrique ordinaire *dit à trois dimensions* (espace euclidien).

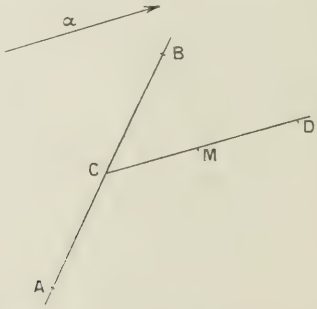
CHAPITRE II.

1. — LE POINT ET LE SPATH.

9. **Le point** [1]. — Le point est l'élément géométrique au moyen duquel sont engendrées toutes les autres figures géométriques. Quand un point se déplace dans une certaine direction constante, il engendre une ligne que l'on appelle la *droite*. Une droite est déterminée au moyen de deux points. Tous les points d'une droite doivent donc être numériquement dépendants de *deux* quelconques de ces points, pourvu toutefois qu'ils ne soient pas confondus. Nous trouverons, en effet plus loin, les coefficients d'un point arbitraire situé sur une droite donnée définie par deux points. Par rapport au point, la droite est donc (n° 5) une figure géométrique du *second degré*.

Supposons maintenant que tous les points d'une droite se déplacent dans une translation parallèle à une direction fixe α. Nous engendrons ainsi un *plan*, et un point quelconque M de ce plan pourra, d'après ce qui précède, s'exprimer au moyen de deux des points de la droite menée par M parallèlement à la direction α et, en

Fig. 1.



particulier, du point C (*fig.* 1) qui se trouve sur AB et d'un autre point D. Mais C s'exprime lui-même linéairement au moyen des

(1) Outre l'*Ausdehnungslehre*, nous nous sommes principalement inspirés dans ce Chapitre des idées de Peano (*Calcolo geometrico*, Turin, 1888). *Voir* aussi Burali-Forti, *Introduction à la Geometrie differentielle*. Gauthier-Villars, 1897.

deux points A et B. Donc, M s'exprimera linéairement au moyen des *trois* points quelconques A, B, D du plan. Le plan est donc, par rapport au point, un domaine du *troisième degré*.

Supposons enfin que tous les points du plan se déplacent par une translation parallèle à une direction fixe β non parallèle au plan, on verra, par un raisonnement analogue, que tout point de l'espace indéfini s'exprime linéairement en fonction de *quatre* points quelconques *non coplanaires* de l'espace (c'est-à-dire non situés dans un même plan). L'espace indéfini est donc, par rapport au point, un domaine du *quatrième degré*.

Le point n'a pas de dimensions. La droite a une seule dimension qui est sa longueur. Le plan a deux dimensions : longueur et largeur. L'espace géométrique a trois dimensions.

10. **Définitions**. — *a*. J'appelle *vecteur* (Hamilton, *L*) la droite limitée qui a *même longueur, même direction et même sens* que celle qui joint un point A de l'espace à un autre point B, son origine pouvant être d'ailleurs un point quelconque de l'espace autre que A. Nous désignons un vecteur (Hamilton) par une minuscule grecque.

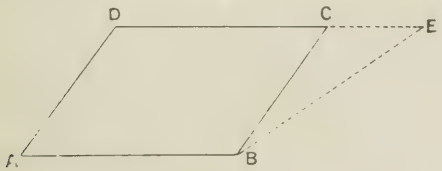
L'équation

$$\alpha = \beta$$

exprime donc que les deux vecteurs α et β, transportés parallèlement à eux-mêmes, de manière à avoir même origine, coïncident. On peut transporter un vecteur dans tout l'espace, parallèlement à lui-même, sans changer sa valeur. Nous désignons la longueur d'un vecteur sous le nom de *teneur* et nous la représentons au moyen de la caractéristique T. Ainsi Tα signifie longueur du vecteur α.

b. J'appelle *parallélogramme* ABC (Grassmann, I_2, 239) le

Fig. 2.



parallélogramme ABCD, dont AB et BC sont deux côtés *consécutifs* (*fig.* 2) et *parallélogramme* $\alpha\beta$ celui dont les vecteurs α et β sont deux côtés *consécutifs*.

Deux parallélogrammes situés dans le même plan ABC, DEF

(ou $\alpha\beta$ et $\gamma\delta$) ont *même signe* ou signe *contraire* suivant que DE étant amené sur AB (ou γ sur α) *sans retournement* de la figure, la direction de D vers E étant la même que celle de A vers B (ou la direction de γ la même que celle de α), les points C et F (ou les vecteurs β et δ) sont ou non du même côté de la ligne AB (du vecteur α) indéfiniment prolongée.

L'aire du parallélogramme ABC (ou $\alpha\beta$) s'appelle sa *teneur*. La teneur est un nombre *essentiellement positif*. On la précède du signe + ou du signe — pour indiquer le sens du parallélogramme par rapport à un autre pris comme terme de comparaison.

Deux parallélogrammes situés dans le même plan sont *égaux* lorsqu'ils ont *même teneur et même signe*.

Il est clair que si deux parallélogrammes ABC, ABE de même base sont égaux, la ligne CE est parallèle à AB (*fig.* 2).

c. J'appelle *spath* ABCD ou *spath* $\alpha\beta\gamma$, le parallélépipède dont trois arêtes *consécutives* non situées dans un même plan sont AB, BC, CD (ou les vecteurs $\alpha\beta\gamma$). Deux spaths ABCD, EFGH (ou $\alpha\beta\gamma$ et $\delta\varepsilon\zeta$) ont même signe ou signe contraire suivant que les parallélogrammes ABC, EFG (ou $\alpha\beta$ et $\delta\varepsilon$) étant amenés dans le même plan et placés de manière à avoir même signe, les points D et H (ou les vecteurs γ et ζ) sont ou non placés du même côté de ce plan indéfini.

Le volume d'un spath s'appelle sa *teneur*. C'est un nombre positif que l'on précède du signe + ou — pour indiquer l'orientation du spath par rapport à un autre pris comme comparaison.

Deux spaths sont égaux lorsqu'ils ont *même teneur et même signe*. Si deux spaths ABCD, ABCE, de même base, sont égaux, la ligne DE est parallèle au plan ABC.

Il est clair que les équations

$$\mathrm{ABCD} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \alpha\beta\gamma = 0$$

expriment respectivement que les quatre points A, B, C, D ou les trois vecteurs α, β, γ *sont coplanaires* [1].

Remarque. — Il faut bien se garder, dans ce qui précède, de considérer ABCD et ABC ou $\alpha\beta\gamma$ et $\alpha\beta$ comme des produits que nous n'avons pas encore définis. Ce sont, pour le moment, de *simples symboles* auxquels il ne faut pas attacher d'autre sens que celui qui leur est donné par la définition.

---

[1] L'expression « coplanaire » (Hamilton) signifie quand il s'agit de *points* « situés dans un même plan » et quand il s'agit de *vecteurs* « parallèles à un même plan ».

11. On appelle *rapport de deux spaths* celui des nombres qui expriment leurs teneurs, affecté du signe + ou du signe — suivant que ces spaths ont même signe ou signe contraire.

Deux spaths quelconques peuvent s'exprimer au moyen d'un troisième pris comme unité, à l'aide de deux nombres positifs ou négatifs. La somme ou la différence de ces spaths est alors exprimée par la somme ou la différence de ces nombres et elle est rapportée à la même unité. On conçoit alors que l'on pourra obtenir le nombre qui représente la somme algébrique d'un nombre quelconque de spaths et, généralement, une fonction linéaire de spaths de la forme

$$x_1 S_1 \pm x_2 S_2 \pm x_3 S_3 \pm \ldots,$$

où x_1, x_2, x_3 sont des nombres quelconques positifs ou négatifs et S_1, S_2, ... des spaths rapportés à une unité choisie.

On remarquera que l'on a

$$ABCD = -BACD = -ACBD = +BADC \ldots,$$

c'est-à-dire qu'un spath change de signe (sans changer de teneur) ou non suivant que le *nombre de permutations* des points ABCD est *impair* ou *pair*. Cette propriété est analogue à une propriété bien connue des déterminants.

On a, de même,

$$\alpha\beta\gamma = \beta\gamma\alpha = \gamma\alpha\beta = -\beta\alpha\gamma = -\alpha\gamma\beta = -\gamma\beta\alpha,$$

c'est-à-dire qu'un spath ne change pas de signe par une *permutation circulaire* des vecteurs α, β, γ, et change de signe par une permutation non circulaire (en conservant la même teneur).

II. — LA FORME F_1.

12. **Définition.** — J'appelle *forme* F_1 une expression formée par une somme de points multipliés par des facteurs réels, telle que

$$F_1 = aA + bB + cC + \ldots$$

et je donne un sens à cette expression en *définissant* l'égalité de deux formes F_1 et

$$F'_1 = a'A' + b'B' + c'C' + \ldots,$$

dépendant ou non des mêmes points, de la manière suivante. Les deux formes F_1 et F'_1 sont *égales* lorsque l'on a, *quels que soient les*

trois points P, Q, R de l'espace, l'égalité suivante :

$$a\mathrm{APQR} + b\mathrm{BPQR} + c\mathrm{CPQR} + \ldots = a'\mathrm{A'PQR} + b'\mathrm{B'PQR} + c'\mathrm{C'PQR} + \ldots$$

entre les spaths APQR, BPQR, ..., A'PQR....

La somme des coefficients

$$m = a + b + c + \ldots$$

s'appelle la *masse* de la forme F_1. Une F_1 à un seul terme, telle que $a\mathrm{A}$, s'appelle *point multiple*.

Il y a deux cas à distinguer suivant que la masse est $\neq 0$ ou nulle. Nous allons voir que, dans le premier cas, la forme F_1 représente *un point multiple*, c'est-à-dire un point de l'espace affecté d'un coefficient qui est précisément égal à la masse, et que, dans le second cas, elle représente un *vecteur*.

A. — Forme F_1 de masse non nulle. Calcul barycentrique.

13. Supposons d'abord que nous considérions une forme composée de deux termes seulement et dont la masse est $\neq 0$, soit

$$F_1 = a\mathrm{A} + b\mathrm{B}, \qquad a + b \neq 0,$$

nous avons le théorème suivant :

Théorème. — *Une forme* $a\mathrm{A} + b\mathrm{B}$ *de masse non nulle peut se mettre sous la forme d'une* F_1 *à un seul terme*

$$(a + b)\mathrm{C},$$

où C *est un point situé sur la droite* AB *et déterminé par l'équation*

$$\frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{CB}} = -\frac{b}{a}.$$

Soient en effet P, Q, R trois points quelconques situés dans un plan (Q) qui coupe AB en H. Les spaths ayant pour base le parallélogramme PQR et pour sommets A, B, C sont entre eux comme leurs hauteurs ou encore comme les longueurs AH, BH, CH, on a donc

$$\frac{\mathrm{APQR}}{\mathrm{AH}} = \frac{\mathrm{BPQR}}{\mathrm{BH}} = \frac{\mathrm{CPQR}}{\mathrm{CH}}$$

ou

$$\frac{a\mathrm{APQR} + b\mathrm{BPQR}}{a\mathrm{AH} - b\mathrm{BH}} = \frac{\mathrm{CPQR}}{\mathrm{CH}}.$$

Si nous posons

$$(a) \qquad (a-b)\mathrm{CH} = a\mathrm{AH} - b\mathrm{BH},$$

nous aurons alors

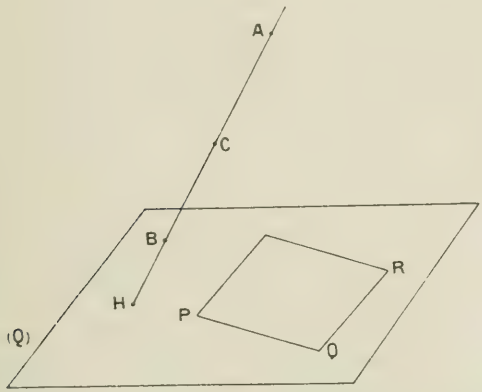
$$(a-b)\mathrm{CPQR} = a\mathrm{APQR} - b\mathrm{BPQR},$$

c'est-à-dire

$$(a-b)\mathrm{C} = a\mathrm{A} - b\mathrm{B},$$

puisque P, Q, R sont quelconques. Ce qui démontre la proposition. La position de C sur la droite AB résulte de l'équation (a).

Fig. 3.



La démonstration serait en défaut si le plan (Q) était parallèle à AB, mais alors les spaths ont même base et même hauteur et l'on a

$$\mathrm{APQR} = \mathrm{BPQR} = \mathrm{CPQR}$$

ou

$$a\mathrm{APQR} + b\mathrm{BPQR} = (a+b)\mathrm{CPQR},$$

quel que soit le point C sur AB.

14. Le résultat précédent s'étend aisément, de proche en proche, au cas où la F_1 comprend 3, 4, ..., n termes. On verra sans difficulté que si l'on a

$$F_1 = a\mathrm{A} + b\mathrm{B} + \ldots - l\mathrm{L},$$

avec

$$a + b + \ldots + l = m \neq 0,$$

on peut écrire

$$F_1 = m\mathrm{G}.$$

G étant un point parfaitement déterminé d'une manière univoque et m étant la masse de la forme F_1.

Le point G ainsi déterminé s'appelle le *barycentre* [1] des points A, B, ..., L, affectés des masses $a, b, \ldots, l$. On voit que ce point n'est autre que le *centre de gravité* des masses $a, b, \ldots, l$ placées aux points A, B, ..., L.

15. Il suit de là que l'équation

$$(a) \qquad C = \frac{xA + yB}{x + y}$$

représente un point quelconque de la droite AB quand on fait varier x et y et que l'on a

$$\frac{y}{x} = -\frac{CA}{CB},$$

on peut donc dire que

$$(x + y)C = xA + yB$$

ou

$$C = mA + (1 - m)B,$$

où

$$\frac{CA}{CB} = \frac{m - 1}{m},$$

est l'*équation de la droite* AB.

On en déduit que trois points A, B, C sont *collinéaires* (ou en ligne droite) si l'on a une relation linéaire de la forme

$$aA + bB + cC = 0,$$

avec

$$a + b + c = 0.$$

De même, si A, B, C sont trois points quelconques de l'espace, la forme

$$(b) \qquad (x + y + z)D = xA + yB + zC$$

représente un point quelconque du plan ABC. C'est l'*équation du plan* ABC. Soit en effet D un point quelconque du plan ABC, joignant C et D par exemple, et soit M le point où CD rencontre AB, on aura, puisque M est sur la droite AB,

$$(x + y)M = xA + yB$$

---

[1] Möbius, *Calcul barycentrique*, 1827.

et alors, puisque D est sur la droite CM,

$$[(x+y)+z]D = (x+y)M + zC = xA + yB + zC.$$

La condition pour que quatre points A, B, C, D soient dans un même plan est qu'il existe une relation

$$aA + bB + cC + dD = 0,$$

avec

$$a + b + c + d = 0.$$

Enfin la forme

$$(c) \qquad P = \frac{xA + yB + zC + uD}{x + y + z + u},$$

où A, B, C, D ne sont ni collinéaires ni coplanaires, *représente un point quelconque de l'espace.*

En posant

$$x + y + z + u = S,$$

on appelle les rapports

$$\frac{x}{S}, \quad \frac{y}{S}, \quad \frac{z}{S}, \quad \frac{u}{S}$$

coordonnées barycentriques du point P.

Elles ne sont déterminées que par leur rapport. Nous en trouverons la valeur un peu plus loin. On posera souvent

$$(d) \qquad x + y + z + u = 1$$

et dans ce cas on dit simplement que x, y, z, u sont les coordonnées barycentriques du point.

16. Applications. — Nous nous contenterons de quelques applications très simples des principes précédents, qui permettront toutefois de voir comment et dans quels genres de questions il est commode d'y avoir recours.

Le barycentre des sommets d'un triangle ABC est donné par l'équation

$$3S = A + B + C.$$

On peut écrire

$$3S = (A + B) + C = A + (B + C) = (A + C) + B.$$

Si l'on remarque que le point $2D = A + B$ est le milieu de AB, on voit par cet arrangement que le barycentre des sommets se trouve à l'intersection des trois médianes. Par conséquent, celles-ci sont concourantes.

On voit de plus que

$$3S = 2D + C,$$

ce qui montre que le point de rencontre se trouve sur la médiane au tiers à partir de la base.

De même le barycentre des sommets du tétraèdre ABCD est donné par l'équation

$$4S = A - B + C - D,$$

et en écrivant

$$\begin{aligned} 4S &= (A + B - C) + D = (A + B) + (C - D) = (A - C) + (B - D) \\ &= (A - D) + (B + C), \end{aligned}$$

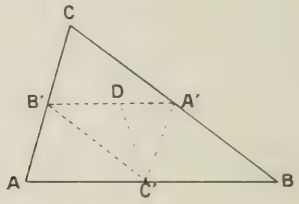
on voit que le point se trouve au quart de la distance à partir de la base de chacune des droites qui joignent les sommets au centre de gravité de la base opposée ou encore au milieu de chacune des droites qui joignent les milieux des côtés opposés, lesquelles se coupent donc en ce point, etc.

Cherchons le barycentre du *périmètre* du triangle ABC (*fig.* 4). Les barycentres des trois côtés sont :

$$C' = \frac{A + B}{2}, \qquad B' = \frac{C - A}{2}, \qquad A' = \frac{B + C}{2},$$

que nous devons affecter de masses proportionnelles aux longueurs

Fig. 4.



c, b, a des côtés, de sorte que le barycentre cherché est donné par l'équation

$$(a + b + c)S' = aA' + bB' + cC',$$

ce qui donne le moyen de le construire.

Divisons A'B' par le point D dans le rapport $\frac{DA'}{DB'} = -\frac{b}{a}$, on aura

$$(a + b)D = aA' + bB',$$

de sorte que le barycentre se trouve sur la droite C'D. D'autre part, le point D, par suite de cette construction, est sur la bissectrice de

l'angle A'C'B'. Il en résulte que le point cherché est le point de rencontre des bissectrices du triangle médian, c'est-à-dire le *centre du cercle inscrit* dans ce triangle.

On peut écrire, puisque

$$A' = \frac{B + C}{2}, \qquad B' = \frac{C + A}{2}, \qquad C' = \frac{A + B}{2},$$

$$\begin{aligned} 2(a + b + c)S' &= a(B + C) + b(C + A) + c(A + B) \\ &= (a + b + c)(A + B + C) - (aA + bB + cC), \end{aligned}$$

ou bien

$$2S' = 3S - J,$$

en posant

$$J = \frac{aA + bB + cC}{a + b + c}.$$

D'après ce que nous venons de voir, J est le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC. On voit donc que, dans tout triangle, le centre du cercle inscrit, le centre de gravité des côtés et celui des sommets sont en ligne droite (n° 15). L'équation précédente indique leurs positions respectives.

Remarque. — Il résulte des n°s 13 et 14 que deux formes F_1 sont égales quand elles ont *même masse et même barycentre* et seulement dans ce cas.

Une équation telle que

$$mA = nB$$

exige donc

$$m = n, \qquad A = B.$$

On pourrait d'ailleurs obtenir ce résultat directement par la définition de l'égalité de deux formes.

B. — La forme F_1 de masse nulle. Le vecteur.

17. Considérons la forme

$$F_1 = B - A$$

ou *différence de deux points* (Hamilton, *Première Leçture on Quaternions*). Cette forme a une masse nulle. Nous l'appellerons un *vecteur* (Hamilton). Le point A s'appelle *origine* du vecteur, le point B s'appelle son *extrémité*. Nous représenterons un vecteur par une petite lettre grecque en posant

$$\alpha = B - A.$$

Deux vecteurs sont égaux lorsqu'on a

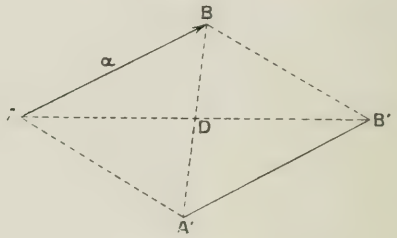
$$B - A = B' - A',$$

d'où (3)

$$\frac{B + A'}{2} = \frac{B' + A}{2},$$

c'est-à-dire (*fig.* 5) que le milieu D de A'B coïncide avec le milieu de AB'. La figure ABB'A' est donc un parallélogramme et par conséquent *deux vecteurs égaux* sont représentés par des droites *égales*,

Fig. 5.



parallèles et de même sens AB, A'B'. *Réciproquement*, deux droites de l'espace, qui ont même longueur, même direction et même sens, représentent des vecteurs égaux. On voit que le symbole α représente l'une quelconque de ces droites et qu'on peut la *transporter parallèlement à elle-même dans tout l'espace*, sans modifier le vecteur qu'elle représente (*cf.* n° 10). On voit ainsi que la définition du vecteur au n° 10 coïncide avec celle que nous donnons ici.

La longueur d'un vecteur s'appelle son *module* ou sa *teneur*. Nous le représenterons par la caractéristique T [1]. Hamilton emploie la même caractéristique T, parce qu'il désigne le module sous le nom de *tenseur*. Cette dernière désignation est actuellement employée autrement (*cf.* 104 et suiv.).

Un vecteur dont le module est égal à l'unité s'appelle *vecteur unité* ou *unitaire*. Nous désignerons par l'indice ou l'exposant zéro un vecteur unité ayant même direction et même sens que le vecteur α. Le zéro en indice ou en exposant indiquera *toujours* un vecteur unité. Dans les cas très rares où nous aurons à employer l'exposant zéro pour indiquer la *puissance zéro* d'un vecteur, nous surmonterons le zéro

---

[1] Nous emploierons aussi, quelquefois exceptionnellement, une petite lettre latine, *a*, par exemple. On trouve aussi (par exemple Sarrau) la caractéristique mod.

d'un trait horizontal. Par conséquent, les vecteurs α_0, α_1^0, $\bar{\alpha}_1^0$ indiquent respectivement les vecteurs unités suivant α, suivant α_1 et le vecteur α_1 élevé à la puissance zéro.

Théorème. — Une forme F_1 *quelconque de masse nulle représente un vecteur.*

Soit en effet la forme

$$F_1 = aA + bB + \ldots + lL,$$

de masse nulle et soit Q un point quelconque. La forme

$$F_2 = aA + bB + \ldots + lL + Q = F_1 + Q$$

représente une forme dont la masse n'est pas nulle puisqu'elle est égale à 1. On a donc un barycentre P

$$F_1 + Q = P(0 + 1);$$

d'où

$$F_1 = P - Q,$$

c'est-à-dire un vecteur (qui peut d'ailleurs être nul).

18. Multiplication d'un vecteur par un scalar. — *Le produit d'un vecteur par un scalar est un vecteur qui a même direction que le vecteur lui-même, dont la longueur est égale à celle du premier multipliée par le scalar et qui a même sens ou sens opposé, suivant que le scalar est positif ou négatif.*

Cela résulte de la définition du produit d'une forme F_1 par un scalar (4). Soit un vecteur

$$\alpha = B - A,$$

on aura

$$m\alpha = mB - mA.$$

Le deuxième membre est une F_1 de masse nulle. C'est donc un vecteur.

Soient A son origine (qui est arbitraire) et C son extrémité. Nous aurons

$$C - A = mB - mA$$

ou

$$C = mB + (1 - m)A,$$

on voit alors (15) que le point C est sur la droite AB ($a + b + c = 0$) et que l'on a

$$\frac{CA}{CB} = \frac{m}{m - 1}.$$

On en déduit facilement que C est du côté de B ou du côté opposé par rapport à m suivant que m est $>$ ou $<$ o et que

$$T(AC) = m\,T(AB)$$

Il suit de là que l'équation

$$\beta = x\alpha,$$

où x est un scalar quelconque, représente un vecteur parallèle à α.

Réciproquement, on peut écrire aussi, en divisant par α,

$$\frac{\beta}{\alpha} = x,$$

mais il faut bien noter que la division de deux vecteurs n'a actuellement de sens que si ces vecteurs sont *parallèles*. Le quotient de la division est alors un nombre (*cf* n° 5, *Remarque* II).

Il suit également de ce qui précède qu'un vecteur peut s'écrire sous forme du *produit de son module par son vecteur unitaire*. D'où

$$\alpha = T\alpha . \alpha_0 = \alpha_0 . T\alpha.$$

On tire de là

$$\alpha_0 = \frac{\alpha}{T\alpha},$$

opération permise puisque $T\alpha$ est un nombre.

Nous convenons de regarder le module d'un vecteur comme un nombre *positif*. C'est en effet un nombre abstrait qui indique simplement le rapport de deux longueurs et qui n'est pas susceptible de signe.

Le rapport de deux vecteurs *parallèles* est égal au rapport de leurs modules affecté du signe + ou -, suivant que les deux vecteurs ont même sens ou non :

$$\frac{\beta}{\alpha} = \pm \frac{T\beta}{T\alpha} \qquad \text{si} \qquad \beta = x\alpha \qquad (\textit{Rem.}\ \text{II}, 5).$$

19. **Addition des vecteurs.** — Si nous avons n vecteurs à additionner, nous pouvons les supposer rapportés à la même origine et leur somme sera alors, en désignant par O cette origine commune,

$$S = (A - O) + (B - O) + \ldots + (L - O) = A + B + \ldots + L - nO.$$

Soit G le barycentre des points A, B, ..., L, nous aurons

$$nG = A + B + \ldots + L,$$

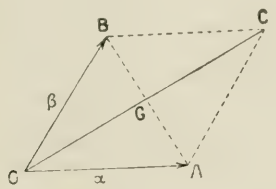
d'où

$$S = nG - nO = n(G - O).$$

La somme est donc un vecteur dirigé suivant OG et dont le module est n fois celui de OG.

En particulier, dans le cas de deux vecteurs OA et OB (*fig.* 6), le point G est le milieu de AB, de sorte que la somme de deux vecteurs α et β est la diagonale $\overline{OC} = 2.\overline{OG}$ du parallélogramme construit sur $\overline{OA}$ et $\overline{OB}$. C'est la règle connue du *parallélogramme*. On en déduira, en étendant successivement la construction à 3, 4, ... vec-

Fig. 6.



teurs la règle connue : *Porter à partir d'une origine quelconque successivement les vecteurs donnés (avec leur signe) l'extrémité de l'un devenant l'origine du suivant. La somme est égale au vecteur qui joint l'origine du premier à l'extrémité du dernier.*

Il n'est pas nécessaire d'insister sur ces notions qui sont entrées actuellement dans le domaine de l'enseignement élémentaire et que l'on résume actuellement sous la forme suivante, rappelant la règle de composition des forces concourantes :

La somme algébrique d'un nombre quelconque de vecteurs est la résultante géométrique de ces vecteurs pris avec leur signe.

Il y a lieu cependant d'ajouter ici quelques remarques souvent utiles.

20. *a*. Soient α et β deux vecteurs *non parallèles*, et a et b deux scalars quelconques. La somme $a\alpha + b\beta$ est un vecteur qui ne peut être nul à moins que $a = 0$, $b = 0$; l'équation

$$a\alpha + b\beta = 0 \tag{1}$$

est donc, dans ce cas, équivalente aux deux équations

$$a = 0, \qquad b = 0.$$

De même l'équation

$$x\alpha + y\beta = x'\alpha + y'\beta$$

entraîne

$$x = x' \qquad y = y'.$$

b. Si l'on n'est pas renseigné sur les directions de α et β et que l'on sache, d'autre part, que a et b ne sont pas nuls, l'équation précédente (1) indique que α est parallèle à β ou

$$\alpha \parallel \beta.$$

c. Si α, β, γ sont trois vecteurs non coplanaires, c'est-à-dire non parallèles à un même plan, l'équation

$$(2) \qquad a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$$

exige que l'on ait

$$a = 0, \qquad b = 0, \qquad c = 0,$$

puisque $a\alpha + b\beta$ par exemple est un vecteur qui est dans le même plan que α et β et qui ne peut donc pas être égal à $c\gamma$ puisque celui-ci n'est pas dans ce plan.

De même l'équation

$$x\alpha + y\beta + z\gamma = x'\alpha + y'\beta + z'\gamma$$

exige dans ce cas que l'on ait

$$x = x', \qquad y = y', \qquad z = z'.$$

Ces remarques sont d'une application fréquente.

d. En posant

$$\rho = C - O, \qquad \alpha = A - O, \qquad \beta = B - O,$$

on déduit de (15) que l'équation

$$(x + y)\rho = x\alpha + y\beta$$

représente *l'équation vectorielle de la droite* passant par les extrémités des vecteurs α et β (c'est-à-dire que ρ est le vecteur d'un point quelconque de cette droite).

De même (15) on verra que

$$(x + y + z)\rho = x\alpha + y\beta + z\gamma$$

est l'*équation vectorielle du plan* passant par les extrémités des vecteurs α, β, γ.

Enfin si l'on a

$$a\rho + b\alpha + c\beta = 0$$

avec

$$a + b + c = 0,$$

les extrémités des vecteurs ρ, α, β sont collinéaires et si l'on a

$$a\rho + b\alpha + c\beta + d\gamma = 0$$

avec

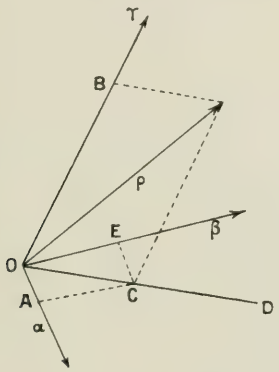
$$a + b + c + d = 0,$$

les extrémités des vecteurs ρ, α, β, γ sont coplanaires.

Il est supposé, bien entendu, que tous ces vecteurs sont rapportés à une origine commune, d'ailleurs arbitraire.

21. Décomposition d'un vecteur suivant trois directions. — Soient ρ un vecteur quelconque et α, β, γ trois autres vecteurs quelconques non coplanaires, c'est-à-dire non parallèles à un même plan et menés par la même origine. Le plan mené par ρ et par γ par exemple (*fig.* 7)

Fig. 7.



coupe le plan $\alpha\beta$ suivant une droite OD et nous pouvons décomposer ρ d'une manière et d'une seule suivant les directions OD et γ en OC et OB. On aura alors

$$OB = z\gamma,$$

z étant un scalar. OC peut également se décomposer d'une manière et d'une seule, suivant α et β en OA et AC (ou OA et OE) $= x\alpha + y\beta$. On a donc

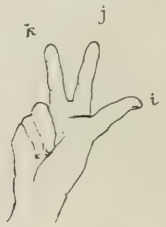
$$\rho = x\alpha + y\beta + z\gamma.$$

On peut toujours décomposer un vecteur suivant trois directions arbitraires non coplanaires, et cette décomposition n'est possible que d'une seule façon.

Nous emploierons de préférence pour cette décomposition un système de trois vecteurs unités trirectangulaires formant un *trièdre à*

droite et que nous désignerons par les symboles i, j, k (Hamilton)[1]. Les vecteurs i, j, k étant représentés respectivement par α, β, γ dans la figure 7, et j et k étant dans le plan de la feuille, le sens *à droite* est celui qui est tel que i est alors perpendiculaire à la feuille et dirigé vers le dessus. On peut dire aussi que si l'on étend les trois premiers doigts de la main *droite* de manière à former un trièdre trirectangulaire (*fig.* 8), les vecteurs i, j, k ont respectivement les

Fig. 8.



directions du pouce, du deuxième doigt et du médius. Ou encore que si l'on enfonce un tire-bouchon tournant dans le sens de j vers k, le tire-bouchon progresse dans la direction du vecteur i (Maxwell).

On déduit de là qu'*un point quelconque* P *de l'espace peut se représenter comme somme d'un point arbitraire et d'un vecteur.*

On a en effet

$$P - O = xi - yj + zk$$

ou bien

$$P = O + xi - yj - zk.$$

On voit qu'un point *n'est point un nombre complexe du système* i, j, k et ne peut pas s'exprimer comme tel, car O ne s'exprime pas en fonction de i, j, k.

C. — La forme F_2. Le bipoint.

22. Définitions. — Nous appelons *forme* F_2 une somme de termes de la forme

$$F_2 = a_1 A_1 B_1 + a_2 A_2 B_2 + \ldots + a_n A_n B_n = \Sigma a AB.$$

---

[1] Hamilton établit le trièdre i, j, k dans le sens opposé au nôtre, c'est-à-dire à gauche, mais le sens des rotations à droite étant le seul employé actuellement en Mécanique et en Physique (sens direct de l'Astronomie), nous nous sommes conformés à cet usage.

où les a sont des scalars et A, B des points et nous disons que la forme F_2 est *égale* à la forme

$$F_2 = a'_1 A_1 B'_1 + a'_2 A'_2 B'_2 \quad \ldots = \Sigma a\, A'B'.$$

si l'on a, *quels que soient les points* P et Q,

$$\Sigma a\, ABPQ = \Sigma a'\, A'B'PQ.$$

Nous appellerons *bipoint* (¹) une F_2 composée d'un seul terme et dont le coefficient est égal à l'*unité*. Considérons d'abord deux bipoints AB et A'B'. Pour qu'ils soient égaux, il faut que l'on ait

$$ABPQ = A'B'PQ,$$

quels que soient P et Q. Or, si PQ est une droite rencontrant AB, on a

$$ABPQ = 0,$$

on doit donc avoir aussi

$$A'B'PQ = 0,$$

c'est-à-dire que tout plan passant par les points A et B doit passer aussi par les points A' et B'. Les quatre points A, B, A', B' sont donc sur une même droite. De plus, si nous supposons que PQ est dans un plan perpendiculaire à AB, la condition d'égalité des spaths exige que la distance entre les points A et B soit la même que la distance des points A'B' et que le sens AB soit le même que celui de A'B'. Ces propriétés montrent qu'un bipoint sera très bien représenté géométriquement *par la ligne* AB *qui joint les deux points* A *et* B, cette ligne pouvant d'ailleurs *glisser le long de son support* (comme une force en statique). On voit qu'un bipoint *n'est pas un vecteur*, au sens que nous avons attaché exclusivement à ce terme, car il ne peut pas se transporter parallèlement à lui-même dans tout l'espace, et ne peut que glisser le long de sa direction. C'est pour cette raison qu'on l'appelle quelquefois *vecteur glissant* (APPELL), Grassmann le désigne sous le vocable *partie de ligne* (*Linienteil*). On voit que :

Deux bipoints sont égaux lorsque, et seulement lorsque, étant portés par la même droite, ils ont même longueur et même sens.

L'addition, la soustraction, la multiplication et la division des bipoints par les scalars suivent les règles du calcul algébrique ordi-

---

(¹) Cette expression est due, croyons-nous, à Study. Elle est employée également par Peano.

naire. En particulier, l'addition des bipoints ne dépend pas de l'ordre des opérations.

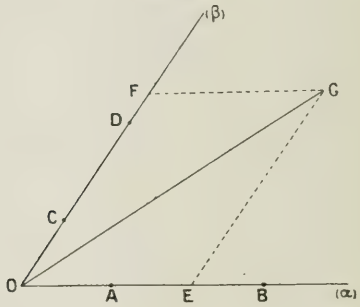
23. Réduction des F_2 [1]. — Nous avons pu ramener une F_1 à une forme simple (point ou vecteur suivant que la masse est $\neq 0$ ou nulle). On peut de même ramener une F_2 générale de n termes à des formes plus simples. Nous distinguerons trois cas.

I. *Les bipoints qui composent la* F_2 *sont coplanaires* (dans un même plan). — Soit d'abord une forme

$$F_2 = a\,AB + b\,CD$$

composée de deux bipoints AB et CD situés dans un même plan et soient (α) et (β) les supports de ces bipoints qui se rencontrent en O. La forme aAB est alors égale à un bipoint porté par (α) et dont la longueur est a fois celle de AB. Son sens est celui de AB ou le sens

Fig. 9.



opposé suivant que $a >$ ou < 0. On peut donc la représenter par un certain bipoint OE porté par (α). De même, bCD sera égal à un bipoint OF porté par β et l'on aura

$$F_2 = OE + OF = OG.$$

En effet, si P, Q sont deux points quelconques, le volume du spath OGPQ est donné par

$$OPQ \times h_G,$$

h_G étant la distance du point G au plan OPQ. De même on aura

$$OEPQ = OPQ \times h_E,$$
$$OFPQ = OPQ \times h_F,$$

---

[1] *Voir* n° 49.

mais il est clair que

$$h_G = h_E + h_F;$$

donc on a bien, d'après la définition de l'égalité des formes F_2 (22),

$$OE + OF = OG.$$

On peut alors étendre la démonstration de proche en proche et l'on voit que *la somme d'un nombre quelconque de bipoints coplanaires* est un *bipoint* qui se trouve *dans leur plan*. La *grandeur* et le *sens* de ce bipoint sont donnés par la résultante géométrique des *vecteurs* aAB, bCD, ... (c'est-à-dire de vecteurs ayant même longueur, direction et sens que les formes aAB, bCD, ...). Sa *position dépend* de celle des bipoints AB, CD, ...

Remarque. — La démonstration se trouverait en défaut si les deux formes aAB et bCD étaient telles que leurs bipoints représentatifs soient *parallèles*. Ce cas sera traité postérieurement (*cf.* n° 50).

II. *Les bipoints qui composent la* F_2 *sont concourants.* — Une démonstration absolument semblable montrera que, dans ce cas, la forme F_2 est réductible à un *bipoint unique* passant par le point de concours des bipoints qui représentent les formes composantes et dont la grandeur, la direction et le sens sont déterminés par la résultante géométrique de ces bipoints composés comme des vecteurs. La somme est encore indépendante de l'ordre des termes.

III. *Les bipoints* AB, CD, ... *sont quelconques.* — Les formes partielles aAB, bCD, ... qui composent la F_2 peuvent être remplacées par des bipoints A'B', C'D', ... portés par les mêmes supports, de sorte que F_2 prend la forme

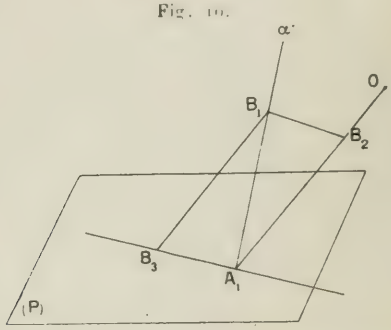
$$F_2 = A'B' + C'D' + \ldots.$$

Soit (α') (*fig.* 10) le support de l'un des bipoints A'B', par exemple. Prenons un plan (P) arbitraire et un point O également arbitraire. A_1 étant le point de rencontre de (α') et de (P), le bipoint A'B' sera représenté par A_1B_1 que nous pouvons décomposer (*voir* II ci-dessus) en deux bipoints A_1B_2 suivant OA_1 et A_1B_3 suivant la droite intersection du plan (P) et du plan OA_1B_1. Le bipoint A_1B_2 peut être transporté de manière à avoir son origine au point O, de sorte que nous voyons, en appliquant la même construction à chacun des bipoints composants, que finalement F_2 pourra être ramenée à *une*

somme de bipoints dont l'un passe pour un point arbitraire et dont l'autre est dans un plan arbitraire, ou

$$F_2 = EF + GH.$$

Fig. 10.



Remarque. - Cette décomposition subsiste si les bipoints sont parallèles entre eux. Les cas particuliers qui se présentent dans la réduction seront développés à propos des applications mécaniques de la F_2 (Chap. IV).

D. — Les formes F_3 et F_4. Tripoint.

24. Définition. Nous appelons *forme* F_3 une expression de la forme

$$F_3 = a_1 A_1 B_1 C_1 + a_2 A_2 B_2 C_2 + \ldots = \Sigma a ABC,$$

où les a sont des scalars et les A, B, C des points, et nous disons que la F_3 est *égale* à la forme

$$F'_3 = \Sigma a' A' B' C'$$

lorsque nous avons, *quel que soit le point* P,

$$\Sigma a ABCP = \Sigma a' A' B' C' P.$$

Une forme F_3, réduite à un seul terme dont le coefficient est l'unité, s'appelle un *tripoint*. Pour que *deux* tripoints ABC, A'B'C' soient égaux, la condition $ABCP = A'B'C'P$, quel que soit P, montre d'abord que A, B, C et A', B', C' doivent être dans le même plan (car si $ABCP = 0$, on doit avoir aussi $A'B'C'P = 0$). Il faut de plus que les parallélogrammes de base ABC et A'B'C' de tout spath ayant le point P pour sommet aient même surface et même sens, c'est-à-dire que deux tripoints sont égaux quand ils sont dans le même plan et

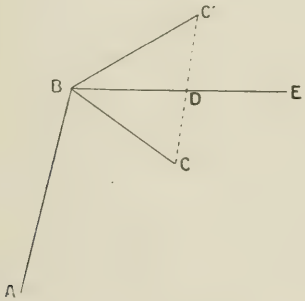
que les parallélogrammes construits sur les côtés AB, BC et A'B', B'C' ont même aire et même orientation (c'est-à-dire que les deux sens ABC et A'B'C' sont les mêmes).

L'addition, la soustraction, la multiplication et la division des tripoints par des scalars se font conformément aux règles du calcul algébrique.

Il suit de là *qu'une* F_3 *peut se représenter par une somme algébrique de tripoints*. Cela résulte des considérations suivantes.

Deux tripoints, coplanaires ou non, ont pour somme un autre tripoint. Car on peut faire tourner chacun d'eux dans son plan de manière à amener l'un des côtés de chacun des tripoints sur la ligne d'intersection de leurs plans. En multipliant alors l'un des deux côtés par un facteur numérique convenable, on les amènera à coïncider en grandeur et direction, et il suffira, pour ne rien changer, de diviser en même temps l'autre côté du tripoint ainsi modifié par le même facteur. On peut donc toujours amener deux tripoints à la forme ABC, ABC'. On verra, par un raisonnement analogue à celui du numéro précédent, que si l'on prend alors le point moyen $\frac{C + C'}{2} = D$ et que l'on construise le point E (*fig.* 11) tel que DE = BD (ou que BE soit

Fig. 11



la somme des bipoints BC et BC'), le tripoint ABE sera égal à la somme ABC + ABC', car on démontrera aisément que l'on a, quel que soit P,

$$ABCP + ABC'P = ABEP.$$

Ce raisonnement pouvant s'étendre de proche en proche, on voit *qu'une* F_3 *se réduit*, d'une manière générale, *à un tripoint*.

25. Nous n'avons rien à ajouter, pour le moment, à ce qui a été

dit aux n°s 10 et suivants sur le spath et la forme F_4, que nous définissons comme somme de spaths affectés de coefficients réels

$$F_4 = \Sigma a ABCD.$$

Une F_4 est un *nombre* et l'égalité de deux F_4 résultera de l'égalité des deux nombres qui les représentent.

Remarque. — Une somme de vecteurs est un vecteur. De même, une somme de tripoints et une somme de spaths sont respectivement un tripoint et un spath. Mais une somme de points n'est pas un point (c'est une F_1) et une somme de bipoints n'est pas nécessairement un bipoint (c'est une F_2). *Voir* Chap. IV.

Nous donnerons après chacun des Chapitres de l'Ouvrage un choix d'exercices se rapportant à ce Chapitre et à ceux qui le précèdent.

Nous avons indiqué entre crochets l'article du Précis auquel l'exercice se rapporte spécialement et donné quelques indications générales sur la solution ainsi que les résultats à obtenir. Cependant, dans notre pensée, le lecteur ne devra avoir recours à ces indications que pour vérifier ses propres résultats, qu'il pourra d'ailleurs obtenir souvent par des moyens différents. Nous recommandons aussi au lecteur désireux d'avancer rapidement dans la pratique du calcul et de pénétrer la nature propre de ses méthodes, de chercher l'interprétation géométrique et physique des transformations de calcul au fur et à mesure qu'elles se présentent. Cet exercice est à la fois très instructif et très intéressant parce que, dans la plupart des cas, le Calcul vectoriel ne fait autre chose que traduire en notation la suite des raisonnements géométriques qui mèneraient à la solution. Il arrivera fréquemment qu'une élégante solution synthétique pourra ainsi être suggérée, en remplaçant simplement les transformations de calcul par la suite de raisonnements que représente leur interprétation géométrique. Citons comme exemples le lemme établi au n° 76 et qui sert à démontrer le théorème d'Halphen, la démonstration du théorème d'Hamilton au n° 77, et bien d'autres où nous n'avons pas rétabli les démonstrations géométriques pour ne pas alourdir le Volume, mais que le lecteur retrouvera sans peine en interprétant pas à pas les solutions analytiques données.

EXERCICES ET NOTES SUR LE CHAPITRE II.

I. *Note sur les points multiples et sur leur dépendance numérique.* — Nous avons développé la théorie de l'addition des points en ne considérant que des points simples et en mettant leurs masses en évidence au moyen de coefficients numériques. Il est souvent plus commode, dans les applications, d'opérer autrement et d'introduire directement dans le Calcul les points multiples désignés alors par une lettre unique, surtout lorsqu'il s'agit de relations de position sans que les rapports métriques interviennent. Le point multiple $a = \alpha A$, où α est un coefficient numérique quelconque ($\neq 0$), occupe en effet la même position que le point simple A et n'en diffère que par sa masse. On voit alors, d'après les démonstrations faites dans le Chapitre II, que l'on peut énoncer d'une manière générale les propositions suivantes :

I. Deux points sont en relation numérique lorsque et seulement lorsqu'ils coïncident.

II. Trois points sont en relation numérique lorsque et seulement lorsqu'ils sont collinéaires.

III. Quatre points sont en relation numérique lorsque et seulement lorsqu'ils sont dans un même plan.

IV. Il existe toujours une relation numérique entre cinq points quelconques.

Par exemple, nous avons vu que, pour que trois points simples A, B, C soient collinéaires, il faut et il suffit qu'on ait les relations

$$pA + qB + rC = 0,$$
$$p + q + r = 0.$$

Mais si nous remplaçons A, B, C par les points multiples a, b, c et si nous supposons une relation

$$la + mb + nc = 0,$$

où l'un au moins des coefficients l, m, n est $\neq 0$, par exemple n, nous en tirons

$$-c = \frac{l}{n}a + \frac{m}{n}b,$$

et il en résulte que les points *multiples* a, b, c sont collinéaires. La

seconde relation entre les coefficients n'est plus nécessaire ici. Elle ne doit avoir lieu que si a, b, c sont des points simples.

Nous trouverons un peu plus loin des applications de cette remarque.

2. *Soit* D *un point de la droite* AB *tel que l'on ait*

$$(m+n)D = mA + nB,$$

montrer que son conjugué harmonique par rapport à A *et* B *est le point*

$$(m-n)D' = mA - nB \quad [13].$$

On a en effet

$$\frac{DA}{DB} = -\frac{n}{m}, \qquad \frac{D'A}{D'B} = +\frac{n}{m};$$

d'où

$$\frac{DA}{DB} : \frac{D'A}{D'B} = -1.$$

Si nous remplaçons A, B, D, D' par les points multiples a, b, d, d', on voit qu'on peut choisir les masses de ces points de manière qu'on ait

$$d = a + b, \qquad d' = a - b.$$

3. *Soit* ABCD *un quadrilatère plan ou gauche. On divise deux côtés opposés proportionnellement par deux points* E, F. *Les points moyens des quadrilatères* ABCD, AEFD, BCEF *sont collinéaires* [15].

On peut poser

$$E = mA + (1-m)B, \qquad F = mD + (1-m)C;$$

si l'on appelle G, G', G'' les points moyens de ABCD, AEFD, EBCF, on trouve

$$G = mG'' + (1-m)G'.$$

4. *Montrer que le centre de gravité de la surface d'un quadrilatère plan, soit* G, *peut se mettre sous la forme*

$$3G = A + B + C + D - S,$$

où S *est le point de rencontre des diagonales* [16].

Menons la diagonale AC. Soient G' le centre de gravité de ABC et G'' celui de ADC, ρ_1 et ρ_2 les surfaces de ABC et ACD, et ρ la surface du quadrilatère. On a

$$3\rho G = \rho_2(A + C + D) + \rho_1(A + B + C),$$

ce qu'on transforme en

$$3\rho G = \rho(A + B + C + D) - (\rho_2 B + \rho_1 D).$$

En menant l'autre diagonale BD, on obtient une expression analogue et l'on remarque que le point

$$\rho_2 B + \rho_1 D = \rho_3 C + \rho_4 A = \rho S$$

est à l'intersection des diagonales.

5. *Étant donnés deux triangles, le centre de gravité du premier, celui du second et le centre de gravité du triangle formé par les milieux des droites qui joignent les sommets sont collinéaires* [15].

Car on a

$$3G = A + B + C, \qquad 3G' = A' + B' + C', \qquad 2G'' = G + G'.$$

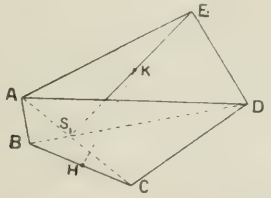
6. *Montrer que le point moyen d'un pentagone homogène peut s'écrire*

$$3G = A + B + C + D + E - 2S.$$

Quelle est la signification du point S? [16.]

Soit le pentagone ABCDE (*fig.* 12); menons la diagonale AD qui

Fig. 12.



divise le pentagone en un triangle AED de surface ρ_1 et un quadrilatère ABCD de surface ρ_2; on a

$$\rho G = \rho_1 G_1 + \rho_2 G_2.$$

Remplaçons G_2 par sa valeur (Exercice 4), on trouve facilement

$$3\rho G = \rho(A + B + C + D + E) - \rho_1(B + C) - \rho_2(S_1 + E);$$

on pose

$$2\rho S = \rho_1 H + \rho_2 K,$$

H étant le milieu de BC et K le milieu de S_1E. Donc S se trouve sur HK. On obtient une autre ligne analogue au moyen d'une autre diagonale. Il y a ainsi cinq lignes telles que HK qui concourent en un même point S.

7. *Lorsque deux triangles sont en perspective, leurs côtés correspondants se coupent sur une même droite* (*théorème de* Desargues) [15].

Soient abc l'un des triangles (points multiples), d le centre de perspective. On peut écrire

$$a' = a + d, \qquad b' = b + d, \qquad c' = c + d;$$

on en déduit

$$a' - b' = a - b, \qquad b' - c' = b - c, \qquad c' - a' = c - a.$$

Le point $a' - b' = a - b$ se trouve à la fois sur $a'b'$ et ab. C'est donc le point e d'intersection de ces côtés. De même, $f = b' - c' = b - c$ et $g = c' - a' = c - a$ sont les points d'intersection de $b'c$, bc et $c'a'$, ca. Or, on a

$$e + f + g = 0.$$

Donc ces points sont collinéaires. [Exercices, Note I.]

Autre solution. — Soit S le sommet de la perspective. Soient A, B, C et A'B'C' les triangles (points simples), on aura

$$A' = mA + (1 - m)S, \qquad B' = nB + (1 - n)S, \qquad C' = pC + (1 - p)S.$$

Soit P le point d'intersection de AB et A'B',

$$P = xA + (1 - x)B = y[mA + (1 - m)S] + (1 - y)[nB + (1 - n)S].$$

On obtiendra x et y en égalant les coefficients de A et B et de S :

$$(m - n)P = m(1 - n)A + n(m - 1)B.$$

Les points Q, R, intersection de BC'B'C' et CA'C'A' [1], s'obtiendront par permutation et l'on trouve que

$$(1 - p)(m - n)P + (1 - m)(n - p)Q + (1 - n)(p - m)R = 0.$$

On voit que la première solution est beaucoup plus simple.

---

[1] La notation du point que nous employons ici est celle d'Hamilton. Par abréviation, AB'CD signifie le point d'intersection de AB et de CD.

8. *Démontrer la réciproque du théorème précédent.*

On emploiera les mêmes procédés.

9. *Soient* ABC *un triangle et* P *un point*

$$aA + bB + cC = P \qquad (a + b + c = 1)$$

de son plan. Point de rencontre de PA·BC.

On trouve

$$A' = \frac{bB + cC}{b + c}.$$

Le résultat est le même si $a + b + c \neq 1$, c'est-à-dire si l'on a

$$(a + b + c)P = aA + bB + cC.$$

10. *Théorème de* Céva. — *Les droites qui joignent un point* P *du plan d'un triangle à ses sommets déterminent sur les côtés opposés des points* A′B′C′ *tels que l'on a*

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = -1.$$

Il suffit d'appliquer le résultat de l'exercice précédent, car on a

$$\frac{A'B}{A'C} = -\frac{c}{b}, \qquad \frac{B'C}{B'A} = -\frac{a}{c}, \qquad \frac{C'A}{C'B} = -\frac{b}{a}.$$

11. *Théorème de* Ménélaüs. — *Une transversale quelconque coupe les trois côtés d'un triangle* ABC *en trois points* A′, B′, C′ *tels que l'on a*

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = +1.$$

On posera par exemple

$$C' = mA + (1 - m)B, \qquad B' = nC + (1 - n)A,$$

et l'on déterminera le point BC·B′C′ (*voir* Exercice 7), c'est-à-dire

$$A' = xB + (1 - x)C.$$

Le théorème résulte alors de la valeur trouvée pour x en fonction de m et de n et de l'interprétation connue des valeurs de m et n comme rapports de segments.

Autre solution. — Soient abc le triangle (points multiples) et f, g, h

les points d'intersection de la transversale avec bc, ca, ab. On peut écrire

$$f = b - c, \qquad g = c - a,$$

et par conséquent

$$h = a - b,$$

puisque $f + g + h = 0$. Soient α, β, γ les masses des points a, b, c, on aura alors

$$\frac{fb}{fc} = \frac{\gamma}{\beta}, \qquad \frac{gc}{ga} = \frac{\alpha}{\gamma}, \qquad \frac{ha}{hb} = \frac{\beta}{\alpha};$$

d'où, par multiplication,

$$\frac{fb}{fc} \cdot \frac{gc}{ga} \cdot \frac{ha}{hb} = 1,$$

ce qui démontre le théorème.

Les réciproques des deux théorèmes précédents sont vraies. Les démontrer.

12. *Les divisions*

$$C = \frac{A + \lambda B}{1 + \lambda}, \qquad D = \frac{A - \lambda B}{1 - \lambda}$$

forment sur la droite AB, *lorsque* λ *varie, deux divisions en involution dont* A *et* B *sont les points doubles* (Exercice 11).

Car on a

$$(ABCD) = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \frac{\lambda}{-\lambda} = -1 = (ABDC).$$

On voit, par ce qui précède, que si l'on a sur une droite AB deux points

$$C = \frac{A + \lambda B}{1 + \lambda}, \qquad D = \frac{A + \mu B}{1 + \mu},$$

le rapport anharmonique

$$(ABCD) = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB}$$

est égal à $\frac{\lambda}{\mu}$. Si l'on pose $\frac{\lambda}{\mu} = K$, les points

$$\frac{A + \lambda B}{1 + \lambda}, \quad \frac{KA + \lambda B}{K + \lambda}$$

décrivent donc sur la droite deux divisions homographiques dont le rapport anharmonique est K.

Les exercices précédents peuvent se traiter identiquement de la

même manière *en remplaçant les points par leurs vecteurs*, ce qui revient à remplacer le point P par le vecteur $\rho = P - O$. Les calculs sont identiques, ainsi que le lecteur pourra s'en assurer facilement. Ici c'est l'expression vectorielle

$$\rho = x\alpha + (1 - x)\beta$$

qui devient l'équation de la droite passant par les deux points dont les vecteurs sont α et β, mais on peut aussi lui donner la forme

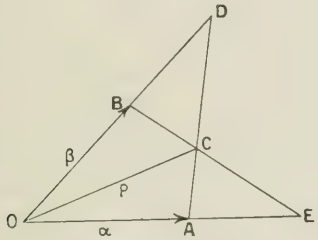
$$\rho = \alpha + x\gamma,$$

où γ est un vecteur quelconque parallèle à $\overline{AB} = B - A$. Cette deuxième forme est quelquefois plus avantageuse.

13. *Les milieux des diagonales d'un quadrilatère complet sont en ligne droite* [20].

On prendra l'origine en un des sommets (*fig.* 13). En prenant

Fig. 13.



$OA = \alpha$, $OB = \beta$, on aura $OE = a\alpha$, $OD = b\beta$. On en déduira le vecteur ρ du point C par l'équation (Exerc. 12)

$$\rho = \alpha + x(b\beta - \alpha) = \beta + y(a\alpha - \beta)$$

et l'on verra alors que les points

$$\frac{\alpha + \beta}{2}, \quad \frac{a\alpha + b\beta}{2} \quad \text{et} \quad \frac{\rho}{2}$$

sont collinéaires.

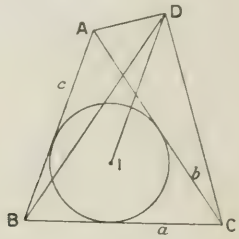
14. *Étant donné un triangle quelconque* ABC, *et* A', B', C' *étant les milieux des côtés, les deux systèmes de forces* OA, OB, OC *et* OA', OB', OC' *sont équivalents* (O étant un point quelconque).

Car on a l'identité

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\beta + \gamma}{2} + \frac{\gamma + \alpha}{2}.$$

15. *Soient* I *le centre du cercle inscrit dans le triangle* ABC *et* a, b, c *les côtés du triangle. La résultante des forces (ou vecteurs)* aAD, bBD, cCD *est égale à* $(a+b+c)$ID, D *étant un point quelconque du plan du triangle.*

Fig. 14.



On montre d'abord que l'on a

$$I = \frac{aA + bB + cC}{a + b + c}$$

et alors le théorème résulte de l'identité

$$a(D - A) + b(D - B) + c(D - C) = (a + b - c)(D - I).$$

16. *Si, dans deux quadrilatères* ABCD, A′B′C′D′, *trois côtés et les diagonales sont parallèles, les quatrièmes côtés sont aussi parallèles* [20].

Hypothèse : AB, BC, CD, AC, BD sont parallèles à A′B′, B′C′, C′D′, A′C′, B′D′ ; il faut montrer que AD et A′D′ sont parallèles. On a

$$A - B = x(A' - B'), \qquad A - C = y(A' - C'), \qquad B - C = z(B' - C').$$

En retranchant les deux premières et comparant à la troisième, on obtient $x = y = z$. Le reste s'achève facilement.

17. *Si l'on forme cinq quadrilatères en supprimant successivement chacun des côtés d'un pentagone quelconque, les lignes qui joignent les milieux des diagonales de ces quadrilatères se rencontrent en un point.* (*Fox Talbot.*)

Prendre comme origine le point de rencontre de deux côtés consécutifs. Les vecteurs des sommets sont alors α, β, $a\alpha$, $b\beta$, $a'\alpha + b'\beta$. Le calcul est un peu long mais ne présente aucune difficulté.

18. *Montrer que la propriété du rapport anharmonique est projective.*

Si l'on a les quatre points α, β, $\frac{\alpha+\lambda\beta}{1+\lambda}$, $\frac{K\alpha+\lambda\beta}{1+\lambda}$, on a $(ABCD) = K$ (Exercice 12). Prenons l'intersection de OC avec une droite quelconque $xa\alpha + (1-x)b\beta$. Nous aurons

$$OC' = \frac{ab(\alpha+\lambda\beta)}{b+a\lambda}.$$

De même

$$OD' = \frac{ab(K\alpha+\lambda\beta)}{\lambda a + Kb}.$$

On écrit

$$OC' = \frac{a\alpha+\mu b\beta}{1+\mu}, \qquad OD' = \frac{K'a\alpha+\mu b\beta}{K'+\mu}.$$

On en déduit $K = K'$, ce qui démontre la proposition.

Les énoncés des exercices suivants sont empruntés au Traité de Jahnke [1].

19. *Montrer que le centre* J *du cercle inscrit dans le triangle* ABC *est donné par*

$$(\alpha) \qquad 2SJ = aA + bB + cC, \qquad 2S = a+b+c,$$

ou bien, si l'on désigne par A_1, B_1, C_1 *les points de contact par*

$$(\beta) \qquad 2SJ = aA_1 + bB_1 + cC_1,$$

AA′ étant une bissectrice, on a

$$A'(b+c) = (bB + cC) \qquad (\textit{voir} \text{ Exercice 9}).$$

On a de même B′ et C′ et l'on obtient (α) en écrivant que J se trouve à la fois sur la droite AA′ et sur BB′ par exemple, ou

$$xA + (1-x)\frac{bB+cC}{b+c} = yB + (1-y)\frac{cC+aA}{c+a}.$$

20. *Les centres des cercles exinscrits du triangle* ABC *sont donnés par les équations*

$$\begin{aligned} 2(S-a)J_1 &= -aA + bB + cC, \\ 2(S-b)J_2 &= aA - bB + cC, \\ 2(S-c)J_3 &= aA + bB - cC. \end{aligned}$$

On utilisera encore le résultat de l'Exercice 9.

---

[1] E. JAHNKE, *Vorlesungen über die Vectorenrechnung*, Leipzig, 1905.

21. ABC *étant trois points quelconques d'un plan, montrer que l'on peut amener leur centre de gravité à coïncider avec un point quelconque du plan, en affectant ces points de masses convenables positives ou négatives.*

Soient $x_1 i + y_1 j$, $x_2 i + y_2 j$, $x_3 i + y_3 j$ les vecteurs de A, B, C et $xi + yj$ le vecteur de P. Il suffit de poser

$$(m_1 + m_2 + m_3)(xi + yj) = m_1(x_1 i + y_1 j) + m_2(x_2 i + y_2 j) + m_3(xi_3 + y_3 j),$$

d'où l'on tire deux équations qui donnent pour m_1, m_2, m_3 des quantités proportionnelles à

$$m_1 = (x - x_2)(y - y_3) - (x - x_3)(y - y_2) \text{ cyclique},$$

c'est-à-dire *aux surfaces des triangles* PAB, PBC, PCA *prises avec leur signe* et rapportées par exemple à la surface ABC prise comme unité. (On obtient le même résultat plus facilement par la multiplication des points) (*voir* n° **42**.)

22. *Le centre* M *du cercle circonscrit à un triangle* ABC *s'exprime sous la forme*

$$\frac{2\Delta}{r^2} M = A \sin 2\alpha + B \sin 2\beta + C \sin 2\gamma,$$

ou encore

$$\frac{2\Delta}{r} M = a \cos\alpha A + b \cos\beta B + c \cos\gamma C,$$

ou

$$16\Delta^2 M = a^2(b^2 + c^2 - a^2) A + b^2(c^2 + a^2 - b^2) B + c^2(a^2 + b^2 - c^2) C,$$

où α, β, γ sont les angles au sommet; a, b, c les côtés opposés; Δ la surface; r le rayon du cercle circonscrit.

On remarque que aire MBC $= \frac{1}{2} ar \cos\alpha = \frac{1}{2} r^2 \sin 2\alpha$ et l'on obtient ainsi les deux premières équations au moyen de la remarque de l'Exercice **21**. Pour obtenir la troisième, on remplace $\cos\alpha$ cycl. par

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \text{ cycl.} \qquad \text{et} \qquad abc = 4\Delta r.$$

23. *Montrer que le point de concours des hauteurs* H *est donné par*

$$16\Delta^2 H = [a^4 - (b^2 - c^2)^2] A + [b^4 - (c^2 - a^2)^2] B + [c^4 - (a^2 - b^2)^2] C$$

ou

$$\frac{\Delta}{r}\mathrm{H} = a\cos\beta\cos\gamma\,\mathrm{A} + b\cos\gamma\cos\alpha\,\mathrm{B} + c\cos\alpha\cos\beta\,\mathrm{C}.$$

On remarque que si A′ est le pied de la hauteur abaissée de A, on a

$$a\mathrm{A}' = c\cos\beta.\mathrm{C} + b\cos\gamma.\mathrm{B}.$$

24. *Montrer que le centre* F *du cercle des neuf points ou cercle de* Feuerbach (*qui passe par les milieux des côtés du triangle*) *est donné par*

$$\begin{aligned}\frac{4\Delta}{r}\mathrm{F} &= (b\cos\beta + c\cos\gamma)\mathrm{A} + (c\cos\gamma + a\cos\alpha)\mathrm{B} + (a\cos\alpha + b\cos\beta)\mathrm{C}\\ &= a\cos(\beta-\gamma)\mathrm{A} + b\cos(\gamma-\alpha)\mathrm{B} + c\cos(\alpha-\beta)\mathrm{C}.\end{aligned}$$

On applique le résultat de l'Exercice **22** au cercle passant par les points $\frac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B})$ cycl. et l'on remarque que l'aire de ce triangle est $\frac{1}{4}\Delta$.

25. *Démontrer, au moyen des résultats précédents, le théorème sur la droite d'Euler :*

$$\begin{aligned}\mathrm{H} + 2\mathrm{M} &= 3\mathrm{S},\\ \mathrm{H} + \mathrm{M} &= 2\mathrm{F},\\ 2\mathrm{F} + \mathrm{M} &= 3\mathrm{S},\\ 4\mathrm{F} &= \mathrm{H} + 3\mathrm{S},\end{aligned}$$

qui indique certaines collinéarités.

26. *Si l'on porte sur les perpendiculaires abaissées du centre du cercle inscrit sur les côtés d'un triangle et dans le même sens des longueurs égales, les droites qui joignent les points ainsi obtenus au sommet du triangle sont concourantes.*

Le centre du cercle inscrit est

$$(a+b+c)\mathrm{J} = a\mathrm{A} + b\mathrm{B} + c\mathrm{C}.$$

Le point A′ situé sur la perpendiculaire abaissée de J sur BC et à la distance l du côté BC s'obtient en exprimant les aires des triangles A′BC, A′CA, A′AB. ρ étant le rayon du cercle inscrit, on a

$$\rho(a+b+c)\mathrm{A}' = la\mathrm{A} + [\rho + (\rho - l)\cos\gamma]b\mathrm{B} + [\rho + (\rho + l)\cos\beta]c\mathrm{C},$$

on exprimera alors que les droites

$$xJ + (1 - x)A' = yJ + (1 - y)B' = zJ + (1 - z)C'$$

se rencontrent en un point en cherchant les valeurs de x, y, z satisfaisant à ces six équations.

Nota. Des questions de ce genre où entrent des perpendiculaires à des directions données se traiteront beaucoup plus élégamment au moyen de la propriété du produit intérieur (*voir* n° **30**).

CHAPITRE III.

PRODUITS DES FORMES ENTRE ELLES.

26. Nous avons reconnu, dans ce qui précède, qu'un point quelconque de l'Espace géométrique s'exprime linéairement au moyen de quatre points fixes quelconques formant les sommets d'un tétraèdre, à l'aide de nombres que l'on appelle les *coordonnées barycentriques* du point. Nous avons en effet trouvé (n° **15**, *c*) que l'équation

$$P = \frac{xA + yB + zC + uD}{x + y + z + u},$$

où A, B, C, D sont quatre points fixes *non coplanaires* et dont *trois ne sont pas collinéaires* et x, y, z, u quatre nombres quelconques dont la somme est différente de zéro, peut représenter un point quelconque de l'espace quand on a donné à x, y, z, u des valeurs convenables.

Mais nous avons trouvé d'autres représentations du point. En particulier, nous avons vu (n° **21**) qu'un point quelconque de l'espace peut être regardé comme la somme d'un point et d'un vecteur :

$$P = A + xe_1 + ye_2 + ze_3$$

et il en existe évidemment d'autres que suggèrent des considérations géométriques très simples. Par exemple, on peut choisir comme éléments de référence un plan fixe ϖ défini par trois points A, B, C et un vecteur α non parallèle au plan. Un point P de l'espace sera alors défini par le point d'intersection Q du plan ϖ et de la parallèle à α menée par P, et par le vecteur QP. C'est-à-dire que l'on aura

$$P = xA + yB + zC + m\alpha.$$

Il y a intérêt à englober tous ces cas particuliers où un point est défini par des points et des vecteurs dans une conception générale. Nous y parviendrons en définissant avec Grassmann la *position* d'un vecteur.

Définition (A_2, 228). — Par *point à l'infini* j'entends les directions d'une droite, par *droite à l'infini* l'ensemble des directions d'un plan, par *plan à l'infini* l'ensemble des directions de l'espace. C'est-à-dire qu'on dira de deux droites parallèles qu'elles ont un point à l'infini commun, de deux plans parallèles qu'ils ont une droite à l'infini commune, et de tous les points et droites à l'infini qu'ils se trouvent dans le plan de l'infini.

Afin de pouvoir traiter d'une manière uniforme les grandeurs d'espace du premier degré, c'est-à-dire les points simples ou multiples et les vecteurs (de longueur et direction données), je dirai que la *position d'un vecteur* est le point à l'infini commun aux droites parallèles à ce vecteur ou encore que ce vecteur a une grandeur du premier degré située à l'infini sur ces droites. Également, pour simplifier et pour remplacer l'expression de grandeurs d'espace du premier degré par une autre plus simple, j'appellerai simplement *points*, aussi bien les points simples et multiples que les vecteurs, ceux-ci étant appelés *points à l'infini* (Grassmann, A_2, 228).

Nous pourrons, en tenant compte des considérations précédentes, remplacer les points fixes de référence par des vecteurs (points à l'infini), mais sans en introduire cependant plus de trois (puisque quatre points à l'infini sont coplanaires) et en observant que ces trois vecteurs ne peuvent pas être parallèles à un même plan (puisque trois points à l'infini d'un même plan sont collinéaires).

On pourra alors dire, *d'une manière générale*, que l'espace *géométrique est, relativement au point*, un *domaine du quatrième degré* dont les unités sont les quatre points A, B, C, D (à distance finie ou à l'infini) non coplanaires et dont trois ne sont pas collinéaires.

Nous savons d'autre part (n° 21) qu'un vecteur quelconque de l'espace peut s'exprimer linéairement au moyen de trois vecteurs arbitraires non coplanaires. D'après ce que nous venons de voir, cela revient à dire qu'un point quelconque du plan de l'infini s'exprime linéairement en fonction de trois points non collinéaires de ce plan et la proposition (n° 21) se présente ainsi comme un cas particulier de la proposition (n° 15, *b*). Le domaine des vecteurs de l'espace est donc un domaine plan du *troisième* degré et nous pourrions déduire les règles de calcul relatives aux vecteurs de celles que l'on obtiendrait en particularisant le calcul des points de l'espace à celui des points d'un plan. Cependant, à cause de son importance particulière, il convient d'étudier séparément le calcul des vecteurs et nous sommes ainsi

amenés à considérer la multiplication géométrique dans deux domaines différents :

1° Le domaine du quatrième degré avec le *point* comme élément ;

2° Le domaine du troisième degré avec le *vecteur* comme élément.

Mais, avant d'étudier cette multiplication d'une manière générale, il convient de poser quelques définitions importantes :

A. — Complément. Multiplication alternée. Produit extérieur.

27. La définition générale de la multiplication que nous avons donnée au n° 6 donne naissance à des résultats dont la nature dépendra des relations qui seront établies entre les unités dans leurs associations multiplicatives. Nous considérerons, dans ce qui suit, la multiplication *particulière* assujettie aux deux règles de calcul suivantes :

1° Un produit monome d'unités *change de signe* lorsque l'on permute deux facteurs consécutifs ;

2° Un produit monome d'unités *s'annule* lorsque deux facteurs consécutifs sont égaux.

La multiplication ainsi définie s'appelle *multiplication combinatoire* (¹) ou *alternée* et le résultat de la multiplication s'appelle *produit extérieur*. On le représente par le symbole [ ].

On déduit immédiatement de la définition qu'un produit monome dans lequel *deux facteurs sont égaux* est *nul*. En effet, on pourra toujours, au moyen de permutations successives qui ne font que changer le signe, amener ces deux facteurs à être consécutifs. Le produit est donc nul.

Il en résulte aussi que, dans un domaine de degré n, *un produit de degré supérieur à n est nul*, car il contiendra toujours au moins deux facteurs égaux. En particulier, dans le domaine de l'espace, le produit extérieur de *plus de quatre points* ou de *plus de trois vecteurs* est nul.

Il en résulte également qu'on ne change pas la valeur d'un produit alterné en y ajoutant à l'un des facteurs simples un multiple quelconque d'un *autre* facteur simple (A_2, 67).

(¹) En réalité la définition de Grassmann (A_2, 52) donnée pour un nombre quelconque de facteurs est un peu différente de la nôtre. Elle s'y ramène pour le cas du domaine de l'espace euclidien que nous considérons exclusivement.

Car, soient a et b deux facteurs simples, on a [6]

$$\begin{aligned}[a(b+xa)] &= [ab] + [a.xa] \\ &= [ab] + x\,[aa] \\ &= [ab]\end{aligned}$$

et ceci s'étend facilement à un produit d'un nombre quelconque de facteurs.

28. Complément d'une grandeur. — Considérons un domaine de degré n dépendant de n unités primitives $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Posons (condition essentielle)

$$(1) \qquad [e_1 e_2 \ldots e_n] = -1,$$

et soit E une grandeur de degré $r < n$, formée du produit de r de ces unités prises dans un certain ordre. Formons le produit E′ des $n - r$ unités qui ne sont pas contenues dans E et soit E′ ce produit dans lequel les $n - r$ unités sont prises dans un certain ordre, d'ailleurs arbitraire. Il est clair que, par suite de la convention (1), le produit extérieur

$$[\mathrm{EE}']$$

sera égal à ± 1. Dans le premier cas nous dirons que E′ est le complément de E et dans le second que $-$E′ est le complément de E. On représente le complément par la notation |. On a donc, dans tous les cas,

$$(2) \qquad |\,\mathrm{E} = [\mathrm{EE}']\,\mathrm{E}'.$$

Le complément d'un nombre réel est ce nombre lui-même. Remplaçons en effet dans (2) la grandeur E par mE, m étant un scalar. On a

$$|\,[m\mathrm{E}] = [m\mathrm{EE}']\,\mathrm{E}' = m\,[\mathrm{EE}']\,\mathrm{E}',$$

si nous posons E $= 1$, d'où il résulte E′ $= 1$, on a donc $|\,m = m$.

Par définition, le complément d'une grandeur A quelconque du domaine est la grandeur |A obtenue en remplaçant dans l'expression de cette grandeur en fonction des unités relatives (d'ordre quelconque) chacune des unités relatives par son complément (A_2, 90). Il suit de là que si l'on a

$$\mathrm{A} = \alpha_1 \mathrm{E}_1 + \alpha_2 \mathrm{E}_2 + \ldots + \alpha_p \mathrm{E}_p,$$

on aura

$$(3) \qquad |\,\mathrm{A} = \alpha_1\,|\,\mathrm{E}_1 + \alpha_2\,|\,\mathrm{E}_2 + \ldots + \alpha_p\,|\,\mathrm{E}_p.$$

Le degré du complément d'une grandeur est donc égal à la *différence* entre le degré du domaine et celui de la grandeur elle-même.

Le produit extérieur d'une unité par son complément est égal à $+1$. Car soit E_r une unité du degré r, formée au moyen du produit de r unités primitives et soit E' le produit des unités primitives qui n'entrent pas dans E_r, on a

$$\dashv | E_r = E',$$

suivant que

$$[E_r E'] = \pm 1.$$

D'où l'on déduit facilement la proposition

$$(4) \qquad [E_r | E_r] = +1.$$

Le double complément d'une grandeur A (c'est-à-dire le complément du complément de cette grandeur) est égal *à la grandeur elle-même ou à cette grandeur changée de signe* suivant que le produit des degrés de la grandeur d'une part et de son complément de l'autre est pair ou impair, ou

$$(5) \qquad || A = (-1)^{qr} A,$$

où q est le degré de A et r celui de $| A$ (A_2, 92).

Le lecteur démontrera sans peine cette proposition en supposant que A est un produit extérieur d'unités primitives et en s'appuyant sur la proposition suivante facile à démontrer à savoir que si A et B sont deux facteurs de degrés q et r, on a

$$(6) \qquad [BA] = (-1)^{qr} [AB].$$

Il résulte de là que *si le degré du domaine est pair*, on a

$$(7) \qquad || A = (-1)^q A,$$

où q est le degré de A et que, *si le degré du domaine est impair*, on a

$$(8) \qquad || A = A.$$

Cela résulte de ce que l'on a $r = n - q$ et, par suite, si n est impair, l'un des deux nombres q ou $n - q$ est pair et par suite

$$(-1)^{q(n-q)} = +1.$$

Si n est pair, on voit que $q(n - q)$ est pair ou impair, suivant que q l'est lui-même.

29. Produit régressif. — Nous avons vu plus haut (n° **27**) qu'il n'est pas possible en conservant à la multiplication les propriétés que nous avons attribuées au produit extérieur d'obtenir des produits d'un degré supérieur à celui du domaine. Pour obtenir de tels produits il faut donc introduire une nouvelle définition. Grassmann y parvient *en supprimant dans ce cas la propriété associative* au moyen de la définition suivante :

Définition (A_2, 94). — Lorsque la somme des ordres de deux unités est inférieure ou égale au degré du domaine principal, j'entends par *produit progressif* de ces unités leur produit extérieur, en convenant toutefois que le produit progressif des n unités fondamentales est égal à $+1$. Au contraire, lorsque la somme des ordres de deux unités est supérieure au degré n du domaine, j'entends par *produit régressif* de ces unités la grandeur dont le complément est le produit progressif des compléments de ces unités.

On a donc par *définition*, si EF est un produit régressif d'*unités*,

$$(1) \qquad |[EF] = [|E|F].$$

Un produit progressif est associatif, un produit régressif ne l'est pas.

L'équation (1) *est générale* quelles que soient les grandeurs E et F, c'est-à-dire que E et F peuvent être des grandeurs quelconques de la forme

$$E = \Sigma\alpha_r E_r, \qquad F = \Sigma\beta_s F_s,$$

où E_r et E_s sont respectivement des unités de degré r et s, la somme $r+s$ étant $>$ ou $=$ ou $< n$. Ce théorème est démontré dans toute sa généralité, dans le cas d'un domaine de degré n quelconque, au n° 97 de A_2. Mais nous n'en aurons pas besoin dans le cas général. Il nous suffit de le démontrer généralement dans le cas où $r+s>n$ et nous le démontrerons plus loin dans les deux cas particuliers où $n=4$ ou $n=3$ quand $r+s=n$ ou $<n$. La première partie du théorème ($r+s>n$) résulte des égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
[|E|F] &= [\Sigma\alpha_r|E_r\,\Sigma\beta_s|F_s] \\
&= \Sigma\alpha_r\beta_s[|E_r|E_s] = \Sigma\alpha_r\beta_s|[E_rF_s] \quad [\text{n° } 29\ (1)] \\
&= \Sigma\alpha_r\beta_s[E_rF_s] = |[\Sigma\alpha_rE_r,\ \Sigma\beta_sF_s] = |[EF].
\end{aligned}$$

La multiplication, tant progressive que régressive appliquée au *plan* (comme domaine du troisième degré), donne pour résultat ce que

Grassmann appelle un *produit planimétrique*. Appliquée à l'*espace* (comme domaine du quatrième degré) elle donne les *produits stéréométriques* (*voir* n°s 34 et suiv.).

Le produit extérieur de deux grandeurs (tant progressif que régressif) s'appelle *produit relatif*.

B. — Produit intérieur.

30. **Produit intérieur.** *Définition* (A_2, 132). — J'entends, par *produit intérieur* de deux *unités* de degrés quelconques, le produit relatif de la première et du complément de la seconde. C'est-à-dire que si E et F sont des *unités* de degré quelconque, le produit intérieur des unités E, F est

$$[E \mid F]. \tag{1}$$

Théorème I (A_2, 138). — Le produit intérieur de deux *grandeurs quelconques* est égal au produit relatif de la première et du complément de la seconde.

Soient en effet $A_1, A_2, \ldots, A_n$ et $B_1, \ldots, B_m$ les unités dont A et B dépendent numériquement. On a

$$A = \alpha_1 A_1 + \ldots + \alpha_n A_n,$$
$$B = \beta_1 B_1 + \ldots + \beta_m B_m.$$

Adoptons momentanément le signe $\times$ pour indiquer la multiplication intérieure, on aura

$$[A \times B] = [\alpha_1 A_1 + \ldots] \times [\beta_1 B_1 + \ldots] = \Sigma \alpha_r \beta_s [A_r \times B_s].$$

La somme s'étendant aux valeurs de r de 1 à n et de s de 1 à m. Mais A_r et B_s *étant des unités*, on a

$$[A_r \times B_s] = [A_r \mid B_s],$$

d'où

$$[A \times B] = [\Sigma \alpha_r A_r \Sigma \beta_s \mid B_s] = [A \Sigma \beta_s \mid B_s] = [A \mid \Sigma \beta_s B_s] = [A \mid B]. \tag{2}$$

Les propriétés du produit intérieur dont nous aurons à faire usage sont les suivantes :

Théorème II. — Le produit intérieur de deux unités égales est égal à $+1$.

C'est-à-dire que si E_r est une *unité* d'ordre quelconque, on a

$$[E_r \mid E_r] = 1. \tag{3}$$

Cela ressort de la définition du complément et de celle du produit relatif (n° 28).

Théorème III. — On peut intervertir l'ordre des facteurs d'un produit intérieur lorsque les facteurs sont *du même degré*.

Car si A et B sont du même degré, ces grandeurs dépendent numériquement des mêmes unités. On a alors

$$A = \Sigma\alpha_p E_p, \qquad B = \Sigma\beta_r E_r, \qquad | B = \Sigma\beta_r | E_r;$$

d'où

$$[A | B] = [\Sigma\alpha_p E_p \beta_r | E_r] = \Sigma\alpha_p \beta_r.$$

Car $[E_p | E_r] = +1$, si $p = r$ et $= 0$ si $p \neq r$ (puisque dans ce dernier cas $| E_r$ contient certainement des unités existant déjà dans E_p). On aura de même

$$[B | A] = \Sigma\alpha_p \beta_r,$$

d'où

$$(4) \qquad [A | B] = [B | A].$$

Remarque. — On voit que le produit intérieur de deux *unités* qui ne sont pas égales entre elles est *nul*.

C. — La multiplication dans l'espace considéré comme domaine du quatrième degré.

31. Produit extérieur de points. — Considérons d'abord deux points *simples* A et B. Leur produit extérieur

$$[AB],$$

d'après les règles de la multiplication alternée (n° 27), doit posséder les propriétés suivantes :

$$[AB] = -[BA], \qquad [AA] = 0.$$

Considérons maintenant le *bipoint* AB. On a de même

$$AB = -BA, \qquad AA = 0.$$

Ces propriétés communes font penser qu'il peut y avoir identité entre un produit extérieur de deux points et le bipoint qui les joint. Cela résulte en effet du Théorème suivant :

I. *Théorème* (A_2, 247). — Un produit alterné $|AB|$ de deux points *simples* A et B est égal au produit alterné de deux autres points

simples $|CD|$ lorsque et seulement lorsque les droites indéfinies AB et CD coïncident et que AB et CD ont même longueur et même sens.

De sorte que le produit $|AB|$ et le bipoint AB posséderaient exactement les mêmes propriétés (n° **22**) et représenteraient par conséquent des figures équivalentes.

Démonstration. — 1° Supposons que les droites indéfinies AB et CD coïncident et que AB et CD aient même longueur et même sens, il faut démontrer que $|AB| = |CD|$.

Puisque AB et CD ont même longueur et direction, on a (n° **17**)

$$B - A = D - C.$$

D'autre part, A, B, C étant collinéaires, B — A et C — A sont des vecteurs parallèles et l'on peut poser (n° **18**)

$$(\alpha) \qquad C - A = m(B - A);$$

on a alors

$$\begin{aligned}
[CD] &= [C(D - C)] = [C(B - A)],\\
&= [(A + C - A)(B - A)],\\
(\alpha) \qquad &= [\{A + m(B - A)\}(B - A)],\\
(27) \qquad &= [A(B - A)],\\
(27) \qquad &= [AB].
\end{aligned}$$

2° Soit par hypothèse

$$[AB] = [CD],$$

il faut démontrer que A, B, C, D sont en ligne droite et que AB et CD ont même longueur et même sens.

Définissons les points C et D au moyen de quatre points dont deux sont A et B et dont deux sont les points à l'infini (vecteurs) α et β (non parallèles à AB), nous aurons

$$\begin{aligned}
C &= xA + yB + z\alpha + u\beta,\\
D &= x'A + y'B + z'\alpha + u'\beta,
\end{aligned}$$

avec les conditions (n° **15**, *d*)

$$\begin{aligned}
x + y + z + u &= 1,\\
x' + y' + z' + u' &= 1;
\end{aligned}$$

or, si nous effectuons le produit $|CD|$ en remarquant que

$$[AB] = -[BA], \qquad [A\alpha] = -[\alpha A], \qquad \ldots,$$

nous avons

$$[CD] = (xy' - yx')[AB] - (xz' - zx')[A\alpha] + (xu' - ux')[A\beta] \\ - (yu' - uy')[B\beta] + (zu' - uz')[\alpha\beta],$$

ce qui exige, d'après l'hypothèse $[AB] = [CD]$,

$$xy' - yx' = 1,$$
$$xz' - zx' = xu' - ux' = yu' - uy' = zu' - uz' = 0.$$

Ces équations ne sont compatibles que si l'on a

$$z = z' = u = u' = 0.$$

Nous voyons donc que C et D doivent prendre la forme

$$(\beta) \qquad \begin{cases} C = xA + yB, \\ D = x'A + y'B. \end{cases}$$

avec les conditions

$$(\gamma) \qquad xy' - yx' = 1, \qquad x + y = 1, \qquad x' + y' = 1.$$

Les équations (β) expriment que C et D sont situés sur la droite AB et il est facile de déduire des conditions (γ) que l'on a

$$D - C = B - A,$$

ce qui démontre complètement la proposition.

Nous pouvons donc traiter le produit $[AB]$ comme le bipoint AB et poser

$$(p) \qquad [AB] = AB.$$

Remarque. — Il faut bien remarquer que le théorème suppose essentiellement que les points A, B, C, D sont des points *simples*.

II. *Théorème* (A_2, 254). — Deux produits alternés $[\alpha\beta]$ et $[\gamma\delta]$ de deux vecteurs α, β et γ, δ sont égaux lorsque et seulement lorsque les parallélogrammes $\alpha\beta$ et $\gamma\delta$ ont même teneur et même signe et sont situés dans des plans parallèles.

Supposons *d'abord* que α et β soient des vecteurs rectangulaires et soient α_0 et β_0 deux vecteurs unitaires dirigés suivant α et β, et a et b leurs longueurs. On aura (n° 18)

$$\alpha = a\alpha_0, \qquad \beta = b\beta_0.$$

On peut poser alors (n° 21)

$$\gamma = x\alpha_0 + y\beta_0 + z\varepsilon,$$
$$\delta = x'\alpha_0 + y'\beta_0 + z'\varepsilon.$$

En effectuant le produit $[\gamma\delta]$ et tenant compte de la condition

$$[\alpha\beta] = [\gamma\delta],$$

on trouve, par un calcul analogue à celui du numéro précédent,

$$xy' - yx' = ab, \qquad z = z' = 0,$$

ce qui montre que γ et δ sont *coplanaires* avec α et β et que, par un théorème connu de géométrie analytique, l'aire du parallélogramme $\gamma\delta$ est égale à celle du rectangle $\alpha\beta$ et de même signe.

Supposons *deuxièmement* que l'on ait

$$[\gamma\delta] = [\alpha\beta],$$

α et β étant des vecteurs quelconques. Prenons deux vecteurs *rectangulaires* ε et ζ tels que l'on ait

$$[\alpha\beta] = [\varepsilon\zeta].$$

On voit par ce qui précède que les vecteurs α, β, ε, ζ seront coplanaires et que les parallélogrammes $\alpha\beta$ et $\varepsilon\zeta$ auront même aire et même signe. Mais on a aussi d'après l'hypothèse

$$[\gamma\delta] = [\varepsilon\zeta],$$

donc les vecteurs α, β, γ, δ seront *coplanaires* et les parallélogrammes $\alpha\beta$ et $\gamma\delta$ auront même aire et même signe, ce qui démontre la proposition.

III. *Théorème* (A_2, 255). — Deux produits alternés non nuls de trois points *simples* [ABC] et [DEF] sont égaux lorsque et seulement lorsque les parallélogrammes ABC et DEF sont égaux et de même signe et situés dans le même plan.

Démonstration. — 1° Supposons que ABC et DEF soient des parallélogrammes égaux et de même signe dans un même plan, il faut démontrer que $[ABC] = [DEF]$.

Posons

$$(a) \qquad B - A = \alpha, \qquad C - B = \beta, \qquad E - D = \gamma, \qquad F - E = \delta.$$

On a par (H)

$$(b) \qquad [\alpha\beta] = [\gamma\delta].$$

De plus, D — A est un vecteur du plan ABC. On peut donc poser

$$(c) \qquad D - A = a\alpha + b\beta.$$

On a alors

$$
\begin{aligned}
(27)\qquad [DEF] &= [DE(F-E)] = [D(E-D)(F-E)],\\
(a)\qquad &= [D\gamma\beta],\\
(b)\qquad &= [D(\gamma\beta)] = [D(\alpha\beta)] = [D\alpha\beta],\\
(c)\qquad &= [(A + a\alpha + b\beta)\alpha\beta],\\
(27)\qquad &= [A\alpha\beta],\\
(a)\qquad &= [A(B-A)(C-B)],\\
&= [ABC].
\end{aligned}
$$

2° Soit par hypothèse

$$[ABC] = [DEF],$$

il faut démontrer que ABC et DEF sont des parallélogrammes égaux, de même signe et situés dans le même plan.

Lemme. L'équation

$$[ABCD] = 0$$

exprime que les quatre points A, B, C, D sont coplanaires.

Nous pouvons, en effet, exprimer D au moyen des trois points A, B, C et d'un vecteur (point à l'infini) α ou

$$D = xA + yB + zC + u\alpha;$$

d'où (par 27)

$$[ABCD] = u[ABC\alpha].$$

Si donc $[ABCD] = 0$, on aura $u = 0$.

Ceci posé, on a

$$[ABC] = [DEF],$$

les points D, E, F sont dans le plan ABC. Multiplions en effet des deux côtés par D, on a

$$(27)\qquad [DABC] = [DDEF] = 0.$$

Le point D est donc dans le plan A, B, C d'après le lemme précédent. Il en serait de même pour les points E et F.

Prenons alors sur la ligne BC un point G tel que ABG et DEF soient des parallélogrammes égaux et de même signe. Comme ABG et DEF sont dans le même plan, il faut alors, d'après la première partie de la démonstration, que l'on ait

$$[ABG] = [DEF].$$

Mais on aura donc

$$[ABG] = [ABC];$$

mais G étant par hypothèse sur la ligne BC, on a

$$G - B = m(C - B),$$

et par suite

$$[ABC] = [ABG] = [AB\{B + m(c - B)\}] = m[ABC],$$

d'où $m = 1$ et par suite $G = C$. Donc les parallélogrammes ABG et ABC coïncident. Il en résulte, puisque ABG et DEF sont des parallélogrammes égaux et de même signe, qu'il en est de même des parallélogrammes ABC et DEF.

Nous sommes donc amenés à identifier le produit [ABC] de trois points *simples* et le tripoint ABC, et nous poserons

$$(q) \qquad [ABC] = ABC.$$

Le lecteur démontrera maintenant sans peine, par des procédés analogues à ceux que nous avons employés dans les théorèmes précédents, les deux théorèmes suivants.

IV. *Théorème* (A_2, 262). — Deux produits $[\alpha\beta\gamma]$ et $[\delta\varepsilon\zeta]$ de chacun trois vecteurs α, β, γ et δ, ε, ζ sont égaux lorsque et seulement lorsque les spaths $\alpha\beta\gamma$ et $\delta\varepsilon\zeta$ sont égaux et de même signe.

V. *Théorème* (A_2, 263). — Deux produits alternés non nuls [ABCD] et [EFGH] de chacun quatre points *simples* A, B, C, D et E, F, G, H sont égaux lorsque et seulement lorsque les spaths ABCD et EFGH sont égaux et de même signe.

Ce théorème permet d'assimiler le produit [ABCD] au spath ABCD et de poser

$$(r) \qquad [ABCD] = ABCD.$$

Les trois équations (p), (q), (r) donnent aux produits progressifs de points une signification géométrique parfaitement définie.

Il en résulte qu'une forme F_r où $r \leqq 4$ peut être regardée comme une somme algébrique de produits de points affectés de certains coefficients.

32. **Le complément dans le domaine du quatrième degré.** — Soient A, B, C, D quatre points *simples* de l'espace. Nous savons que tous les autres points de l'espace en sont numériquement dépendants. Pour obtenir le complément d'une grandeur quelconque du domaine, nous devons poser (n° 28)

$$[ABCD] = +1,$$

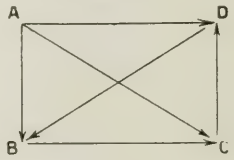
et alors, E étant un produit quelconque de degré < 4 des unités A, B, C, D, nous devons (n° 28), pour obtenir son complément, former dans un ordre arbitraire le produit E′ des unités qui n'entrent pas dans E et vérifier si le produit [EE′] est égal à $+1$ ou -1.

Soit, par exemple, à trouver le complément de BD. Ce complément est AC ou $-$ AC suivant que le produit [BDAC] est $+1$ ou -1; or, on a $[BDAC] = -1$, on a donc

$$[[BD] = -[AC] = [CA].$$

Il n'y a aucune difficulté à appliquer cette règle dans chaque cas, mais il est commode d'employer le diagramme de la figure 15. Pour

Fig. 15.



déterminer au moyen de ce diagramme le complément d'un produit progressif d'unités, on écrira à la suite de ces unités et dans un ordre quelconque les unités qui n'entrent pas dans le produit considéré. Le résultat ainsi obtenu, et qui ne sera autre qu'une certaine permutation de produit ABCD, aura le signe $+$ ou le signe $-$ suivant que les deux premières lettres et les deux dernières se succéderont toutes deux dans le sens des flèches ou toutes deux en sens inverse des flèches, *ou bien* que les deux premières se succédant dans un sens, les deux autres se succèdent dans l'ordre inverse.

Par exemple, dans le cas précédent, $BDAC = -1$ parce que BD est disposé en sens inverse de la flèche qui joint les deux points, tandis que AC est disposé dans le sens de cette flèche.

33. Théorème. — *Le complément du produit de deux unités* E_r *et* E_s *d'ordre quelconque est égal au produit des compléments de ces unités.*

Ce théorème a été démontré (n° 29) dans le cas où $r + s > 4$. Supposons maintenant $r + s = 4$. Si E_r et E_s contiennent toutes deux un même point A par exemple, on aura

$$[[E_r E_s] = 0, \qquad \text{car} \qquad [E_r E_s] = 0;$$

mais d'autre part $|E_r$ ne contient pas A et $|E_s$ ne le contient pas non plus. Donc le produit $||E_r|E_s|$, qui est du quatrième degré, contient deux lettres égales et il est nul aussi.

D'où

$$[|E_r|E_s] = |[E_r E_s] = 0.$$

Supposons alors que E_r, E_s n'aient pas d'unité commune comme facteur. Mais alors E_s est au signe près le complément de E_r et E_r est au signe près le complément de E_s. On a donc

$$|E_r = [E_r E_s] E_s, \qquad |E_s = [E_s E_r] E_r,$$

où $[E_r E_s]$ est $= 1$: on a donc

$$[|E_r|E_s] = [E_r E_s]\,[E_s E_r]\,[E_s E_r];$$

or, $[E_s E_r]\,[E_s E_r]$ est 1.1 ou $(-1).(-1)$ ou, dans les deux cas, $+1$, donc

$$[|E_r|E_s|] = [E_r E_s] = |[E_r E_s],$$

puisque $[E_r E_s]$ est un nombre. (Cette démonstration, qui est celle de Grassmann, ne suppose pas $n = 4$.)

Soit maintenant $r + s < 4$. Ce cas ne peut se présenter que si l'un des facteurs étant un point, l'autre est un point ou un bipoint. Il suffira d'examiner séparément chacun de ces deux cas en effectuant le calcul explicite pour démontrer le théorème.

34. Dans ce qui suit, et en vue de la généralisation, nous définissons les points de l'espace en fonction de quatre unités a, b, c, d, dont *une au moins* est un point simple à distance finie (n° 26), les autres pouvant être des points à distance finie ou à l'infini (des vecteurs). Les démonstrations ainsi présentées ont l'avantage de comprendre les cas particuliers où certains facteurs sont *parallèles* entre eux (ou bien ont un élément uni [1] à l'infini).

Nous aurons souvent à faire usage des deux lemmes suivants :

I. *Le produit extérieur d'un point simple à distance finie et d'un vecteur est un bipoint passant par le point considéré et équipolent au vecteur donné.*

II. *Le produit extérieur d'un point et d'un produit de deux vecteurs* (le produit de deux vecteurs étant une F_2 particulière que

---

[1] *Voir* note à l'Article 36.

nous retrouverons plus loin sous le nom de *bivecteur*) (n° 39) *est un tripoint dont le plan passe par le point donné et dont la teneur et le signe sont les mêmes que ceux du bivecteur.*

Soit en effet P un point simple à distance finie et soient

$$\alpha = B - A, \qquad \beta = C - A$$

deux vecteurs. On a les identités

$$[P\alpha] = [P(B - A)] = [PB] - [PA] = PB - PA,$$

ce qui démontre le lemme I, et

$$[P\alpha\beta] = [P(B - A)(C - A)] = [PBC] = PBC,$$

ce qui démontre le lemme II.

Ceci posé, nous allons démontrer le théorème suivant, dont l'importance est capitale au point de vue des applications.

35. Théorème. — *Le produit régressif de deux grandeurs est congruent à leur élément commun.*

Ce théorème signifie que si nous faisons, par exemple, le produit d'une droite et d'un plan, entendant par là que nous effectuons le produit *régressif* des deux points représentant la droite et des trois points déterminant le plan (l'un au moins de ces points étant dans chaque cas un point à distance finie), le résultat obtenu sera, *à un facteur numérique près*, le point de rencontre de la droite et du plan.

Nous démontrerons d'abord le théorème dans le cas où les grandeurs considérées sont des produits des unités primitives a, b, c, d (n° 34). Remarquons que le produit étant régressif, si l'un des facteurs est une droite, l'autre ne peut être qu'un plan. On n'a donc dans l'espace [1] que deux cas à considérer :

1° Produit d'une droite et d'un plan ;

2° Produit de deux plans.

a. Soit une droite ab et un plan bcd. Je dis que l'on a

$$P = [ab.bcd] = b.$$

---

[1] Dans le plan, on aurait à considérer le produit de deux droites. Une démonstration identique montre que, dans ce cas, le produit est congruent à leur point d'intersection.

Il suffit, pour s'en assurer, d'effectuer le produit d'après la règle des produits régressifs (n° 29). On a

$$|ab = cd, \qquad |bcd = -a,$$

d'où

$$|P = -cda = +|b$$

ou bien

$$P \equiv b.$$

b. Soient de même les plans *abc* et *acd*. Je dis que l'on a

$$P = [abc.acd] \equiv [ac].$$

Même démonstration.

c. Soit maintenant *abc* un plan et soit une droite passant par un point D extérieur à ce plan. On peut définir cette droite par le point D et par son point de rencontre avec le plan *abc*. Ce point peut se mettre sous la forme (n° 15) $xa + yb + zc$. L'expression de la droite est donc

$$[D.(xa + yb + zc)],$$

et il suffit de montrer que l'on a

$$[abc.D(xa + yb + zc)] \equiv xa + yb + zc,$$

démonstration qui n'offre aucune difficulté et que nous laissons aux soins du lecteur.

Le théorème peut alors être considéré comme démontré dans sa généralité, en tenant compte de la remarque faite au n° 5. Soient en effet ε_1 une droite et ϖ_1, ϖ_2 des plans quelconques.

Nous pouvons supposer que nous prenons comme unités un point de la droite, soit d_1 et trois points a_1 b_1 c_1 du plan (qui ne peuvent pas être tous à l'infini). D'après ce qui précède, nous obtiendrons le point de rencontre P_1 de la droite et du plan en effectuant le produit $|\varepsilon_1 \varpi_1|$ avec la condition

$$a_1 b_1 c_1 d_1 = 1,$$

puisque les unités sont maintenant a_1, b_1, c_1, d_1. Nous aurons donc

$$[\varepsilon_1 \varpi_1] = -[a_1 b_1 c_1 d_1] P_1.$$

Mais si nous exprimons les unités a_1, b_1, c_1, d_1 au moyen des unités primitives a, b, c, d, à l'aide, par exemple, de leurs coordonnées barycentriques, le spath $|a_1 b_1 c_1 d_1|$ du second membre qui est un *nombre*, se transformera en un nombre, c'est-à-dire un multiple du

spath $[abcd]$, et le point P_1 deviendra l'expression du point de rencontre de la droite et du plan en fonction de a, b, c, d. On aura donc encore

$$[\varepsilon_1 \varpi_1] = P_1,$$

les unités étant maintenant a, b, c, d.

On verra de même que le produit

$$[\varpi_1 \varpi_2],$$

où ϖ_1 et ϖ_2 sont exprimés d'une manière quelconque au moyen des unités, est congruent à l'expression de la ligne d'intersection des deux plans exprimée au moyen des mêmes unités, quelles qu'elles soient. On le démontrera en prenant comme unités provisoires deux points de la ligne d'intersection des deux plans et un point de chacun des plans.

Nous verrons plus loin (n° 37) l'application de ce théorème au cas particulier de facteurs parallèles.

36. Théorème. — *Le produit relatif de deux grandeurs incidentes* [1] (c'est-à-dire dont l'une est contenue dans l'autre) *est nul.*

Le théorème est évident si le produit est progressif (n° 27). Dans le cas où il est régressif, on pourra reprendre la démonstration précédente en considérant d'abord une droite ε_1 et deux plans ϖ_1, ϖ_2 de la forme

$$ab, \quad abc, \quad abc,$$

puis on étendra de même la démonstration au cas général où leurs expressions sont quelconques.

C'est cette dernière propriété exprimée par le théorème précédent que Grassmann a voulu rappeler par la désignation de *produit extérieur* (A_2, 78, Rem.). Il est nécessaire, pour qu'un produit de deux facteurs soit $\neq 0$, que l'un des deux facteurs soit *extérieur* à l'autre.

Les règles précédentes s'appliquent encore dans le cas où le domaine principal est le *plan* au lieu de *l'espace*. Grassmann distingue les produits relatifs de points en produits *stéréométriques*, lorsque le domaine est celui de l'espace (4e degré), et produits *planimétriques*, lorsque le domaine est le plan (3e degré) (A_2, 288). Les règles sont les mêmes : il n'y a que le domaine qui change. Ainsi un produit de quatre points est progressif dans l'espace, mais régressif

---

[1] On emploie plutôt maintenant le terme de grandeurs *unies* (*Vereint*).

dans le plan. Dans le cas des produits planimétriques, si a, b, c sont les unités choisies, on devra poser

$$[abc] = +1.$$

Dans le domaine de l'espace, nous aurons donc les unités suivantes :

4 unités de premier degré.....	a, b, c, d
6 unités de second degré	$\varepsilon_1 = ab$, $\varepsilon_2 = bc$, etc.
4 unités de troisième degré....	$\varpi_1 = abc$, $\varpi_2 = bcd$, ...
1 unité absolue	$abcd = +1$.

Dans le domaine du plan, nous avons seulement sept unités :

3 unités de premier degré.....	a, b, c
3 unités de second degré.....	$\varepsilon_1 = ab$, $\varepsilon_2 = bc$, $\varepsilon_3 = ca$
1 unité absolue.....	$abc = +1$

37. Cas des facteurs parallèles. — Grâce à l'introduction de la notion de position d'une droite (n° 26) nous avons pu établir des résultats généraux sans nous préoccuper de savoir si les points considérés sont des points à distance finie ou des points à l'infini. Mais certains résultats relatifs aux cas particuliers où l'on considère des points à l'infini peuvent s'énoncer sous une forme légèrement différente qui peut quelquefois présenter des avantages. Nous nous contenterons d'énoncer les propositions suivantes. Il importe de ne pas y confondre les expressions *bipoint* et *vecteur*.

I. Le produit *planimétrique* de deux *bipoints* parallèles est congruent à un *vecteur* parallèle à la direction commune des bipoints.

On peut démontrer ce théorème directement, mais nous préférons le démontrer comme cas particulier des théorèmes généraux n°s 35 et 36.

Soit α la direction commune des deux bipoints passant respectivement par les points A et B. On pourra écrire ces bipoints sous la forme (n° 34, I)

$$[A.x\alpha] \qquad \text{et} \qquad [B.y\alpha]$$

et le produit sera

$$[(A.x\alpha).(B.y\alpha)] = xy[A\alpha.B\alpha] = \alpha \qquad \text{par n° 35.}$$

II. Le produit *stéréométrique* d'un *bipoint* et d'un plan qui lui est parallèle est congruent à un *vecteur* parallèle au bipoint. Car si α est la direction du bipoint passant par le point A, on pourra mettre le bipoint et le plan sous les formes

$$[A.x\alpha] \qquad \text{et} \qquad [B\alpha\beta].$$

le produit stéréométrique sera alors

$$[(A.x\alpha).(B\alpha\beta)] = x[A\alpha.B\alpha\beta] \equiv \alpha.$$

III. Le produit *stéréométrique* de deux *tripoints* situés dans des plans parallèles est congruent à un produit de deux *vecteurs* parallèles à leur plan.

Car on peut mettre les tripoints sous les formes

$$[A.x\alpha.y\beta] = xy[A\alpha\beta] \qquad \text{et} \qquad [B.z\alpha.u\beta] = zu[B\alpha\beta]$$

et le produit sera

$$xyzu[A\alpha\beta][B\alpha\beta] = [\alpha\beta].$$

On pourrait encore dans ce dernier cas raisonner comme il suit. Le produit stéréométrique de deux plans étant congruent à leur ligne d'intersection (n° 35), celui de deux plans parallèles est congruent à la droite de l'infini de ces plans. Mais cette dernière droite est congruente au produit de deux de ses points, c'est-à-dire de deux points à l'infini (vecteurs) de ces plans. Donc finalement le produit des deux plans est congruent au produit de deux vecteurs qui leur sont parallèles (*voir* n° 41, IV).

Il est clair que le produit *stéréométrique* de deux droites parallèles est nul.

Le lecteur trouvera un peu plus loin, dans le Chapitre IV, consacré à quelques applications des formes, quelques notions sur les questions relatives à la commutativité des facteurs dans un produit stéréométrique (n° 44).

D. — Multiplication alternée dans l'espace comme système du troisième degré.

38. Nous considérons maintenant dans ce qui suit l'ensemble des *vecteurs* de l'espace. Nous savons (n° 21) que tous les vecteurs de l'espace sont numériquement dépendants de trois quelconques d'entre eux non coplanaires que nous pouvons prendre comme unités et nous choisissons à cet effet trois vecteurs unités e_1, e_2, e_3, formant un triplet à *droite* (n° 21). Un vecteur quelconque α dont le *module* [1] est a s'exprime sous la forme

$$\alpha = xe_1 + ye_2 + ze_3$$

[1] Le *module* d'un vecteur est le nombre positif qui exprime sa longueur par rapport à l'unité de longueur choisie (n° 18).

et l'on a

$$(1) \qquad a = \operatorname{mod}\alpha = \mathrm{T}\alpha = +\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

un module étant toujours considéré comme un nombre positif.

Les unités du système sont maintenant au nombre de sept, savoir :

3 unités primitives.....	e_1, e_2, e_3
3 unités du second degré.....	e_1e_2, e_2e_3, e_3e_1
L'unité absolue.....	$e_1e_2e_3 = +1$

Nous avons seulement trois unités du second degré et non six, parce qu'en vertu des règles de la multiplication alternée on a (n° 27)

$$e_1e_2 + e_2e_1 = 0, \qquad e_2e_3 + e_3e_2 = 0, \qquad e_3e_1 + e_1e_3 = 0.$$

Les symboles $e_1e_2, \ldots$ étant mis pour $[e_1\ e_2], \ldots$ par abréviation.

Considérons alors deux vecteurs :

$$\alpha = xe_1 + ye_2 + ze_3,$$
$$\beta = x'e_1 + y'e_2 + z'e_3.$$

Si nous effectuons le produit *extérieur* $[\alpha\beta]$ d'après les règles ordinaires, nous trouvons

$$(2) \qquad [\alpha\beta] = (xy' - yx')e_1e_2 + (yz' - zy')e_2e_3 + (zx' - xz')e_3e_1.$$

Prenons le *complément* du produit, nous obtenons (n° 28)

$$(3) \qquad |[\alpha\beta] = (xy' - yx')|e_1e_2 + \ldots.$$

Ou bien, en remarquant que nous avons ici

$$|e_1e_2 = e_3, \qquad |e_2e_3 = e_1, \qquad |e_3e_1 = e_2$$

(à cause de $e_1e_2e_3 = 1$), nous aurons

$$(4) \qquad |[\alpha\beta] = (yz' - zy')e_1 + (zx' - xz')e_2 + (xy' - yx')e_3.$$

Le complément du produit vectoriel (ou extérieur) de *deux vecteurs est donc un vecteur*. Nous en verrons tout à l'heure la signification géométrique.

Formons maintenant le *produit intérieur* (ou scalaire) des vecteurs α et β. Nous avons

$$[\alpha|\beta] = [xe_1 + ye_2 + ze_3, \quad x'|e_1 + y'|e_2 + z'|e_3].$$

Si nous développons le second membre, en remarquant que par

n° 30 nous avons

$$[e_1|e_1] = [e_2|e_2] = [e_3|e_3] = 1,$$
$$[e_1|e_2] = [e_2|e_1] = [e_2|e_3] = \ldots = 0.$$

Nous obtenons

$$(5) \qquad [\alpha|\beta] = xx' + yy' + zz',$$

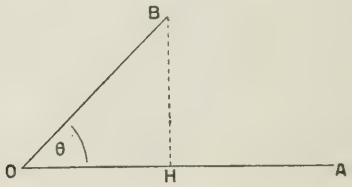
ce qui montre que l'on a

$$(6) \qquad [\alpha|\beta] = [\beta|\alpha]$$

comme cela devait être (n° 30).

Or il est facile de donner de l'expression (5) une interprétation géométrique. Soit (*fig.* 16) OA le vecteur α et soit OB le vecteur β.

Fig. 16.



Désignons par θ l'angle *compris entre* 0 *et* π que font les directions de α et β. Il est clair que les cosinus directeurs de la direction OA, rapportés aux axes Ox, Oy, Oz dirigés suivant e_1, e_2, e_3, sont

$$\frac{x}{a}, \quad \frac{y}{a}, \quad \frac{z}{a},$$

a étant le module de OA. De même les cosinus directeurs de OB sont

$$\frac{x'}{b}, \quad \frac{y'}{b}, \quad \frac{z'}{b},$$

où b est le module de OB. On a donc

$$\cos\theta = \frac{x}{a}\frac{x'}{b} + \frac{y}{a}\frac{y'}{b} + \frac{z}{a}\frac{z'}{b}$$

ou

$$(7) \qquad [\alpha|\beta] = xx' + yy' + zz' = ab\cos\theta,$$

formule importante qui exprime que le *produit scalaire de deux vecteurs est égal au produit du module de l'un des vecteurs par la projection de l'autre sur celui-là*, ou

$$[\alpha|\beta] = \mathrm{OA}.\mathrm{OH}.$$

On en déduit cette conséquence importante : *Le produit scalaire de deux vecteurs perpendiculaires entre eux est nul et réciproquement* (car alors $\cos\theta = 0$).

39. Ceci posé, formons le produit scalaire du vecteur α et du complément du produit $[\alpha\beta]$ exprimé par l'équation (4). Nous voyons sans difficulté que ce produit, obtenu en additionnant les produits deux à deux des composantes e_1, e_2 et e_3 dans chacun de ces vecteurs, est identiquement nul. On trouverait le même résultat en faisant le produit extérieur de ce même complément et du vecteur β. Il en résulte que (n° 38) :

Le complément du produit vectoriel de deux vecteurs est un vecteur perpendiculaire aux deux facteurs du produit.

Le module du complément a pour carré la somme des carrés des composantes, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}(xy' - yx')^2 + (zx' - xz')^2 + (yz' - zy')^2 \\ &= (x^2 + y^2 + z^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2) - (xx' + yy' + zz')^2 \\ &= a^2 b^2 - a^2 b^2 \cos^2\theta \text{ [par (7) art. précédent]} \\ &= a^2 b^2 \sin^2\theta.\end{aligned}$$

Le *module* est donc égal à $ab\sin\theta$ puisque $\sin\theta$ est toujours positif (θ étant compris entre 0 et π).

Quant au *sens* dans lequel le complément est dirigé il suffit, pour l'obtenir, d'appliquer ce qui précède au cas particulier des vecteurs e_1, e_2, e_3 par exemple. On voit alors que ce sens doit être tel que la rotation soit positive de α vers β pour un observateur ayant les pieds sur le plan $\alpha\beta$ et la tête dirigée suivant le vecteur $[[\alpha\beta]]$. Finalement on a donc le résultat suivant :

Le complément d'un produit de deux vecteurs est un vecteur perpendiculaire au plan des deux autres, ayant pour module le nombre qui exprime la surface du parallélogramme construit sur α et β et dirigé dans un sens tel que la rotation de α vers β soit positive par rapport à ce complément (¹).

Un produit de deux vecteurs tel que $[\alpha\beta]$ s'appelle un *bivecteur*. Son complément, défini comme nous venons de le dire, s'appelle l'*index* ou l'*axe* du bivecteur.

Un bivecteur représente l'aire vectorielle construite sur les deux

(¹) Ou encore que le trièdre $\alpha\beta\gamma$ soit *à droite*.

vecteurs dont il est le produit (n° 31, II) et, si nous reprenons l'expression du bivecteur [n° 38, (2)],

$$[\alpha\beta] = (xy' - yx')e_1e_2 + (yz' - zy')e_2e_3 + (zx' - xz')e_3e_1,$$

on reconnaîtra sans peine que les expressions

$$(xy' - yx')e_1e_2, \quad (yz' - zy')e_2e_3, \quad (zx' - xz')e_3e_1$$

représentent les projections sur les plans Oxy, Oyz et Oxz de l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs α et β, de sorte que le bivecteur $[\alpha\beta]$ représente alors cette aire décrite positivement dans le sens tel que son complément satisfasse à la condition donnée plus haut.

Réciproquement *le complément d'un vecteur* pouvant être regardé comme le double complément du bivecteur dont ce vecteur est le complément [n° 28, (8)] *est un bivecteur* dont le plan est normal au vecteur donné, et déterminé par deux vecteurs quelconques de ce plan assujettis à la seule condition que l'aire du parallélogramme construit sur ces vecteurs s'exprime, en fonction de l'unité d'aire, par le même nombre que le module du vecteur donné en fonction de l'unité de longueur et que le sens de rotation du premier vecteur au second, par rapport au vecteur donné, soit positif.

En résumé, il résulte de ce qui précède que l'on peut représenter les vecteurs et leurs produits au moyen des unités e_1, e_2, e_3 et des unités du second degré $\varepsilon_1 = e_2e_3$, $\varepsilon_2 = e_3e_1$, $\varepsilon_3 = e_1e_2$ et que l'on a les relations

$$e_1|e_1 = e_2|e_2 = e_3|e_3 = 1,$$
$$e_1|e_2 = e_2|e_1 = e_1|e_3 = \ldots = 0,$$
$$\varepsilon_3 = e_1e_2 = |e_3, \quad \varepsilon_2 = e_3e_1 = |e_2, \quad \varepsilon_1 = e_2e_3 = |e_1,$$
$$e_1e_2e_3 = -e_2e_1e_3 = \ldots = +1.$$

Le produit intérieur d'une unité par elle-même tel que $e_1|e_1$ se représente souvent par la notation e_1^2. On a donc

$$e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = +1.$$

Ce n'est pas ce système qui a prévalu dans le calcul *des vecteurs*. Il ne présente en effet aucun avantage sur le *calcul des quaternions* qui est beaucoup plus simple. Mais au point de vue du calcul absolu sur les *points*, les *droites* et les *plans* de l'*espace*, le calcul développé sous le titre C de ce Chapitre, présente à son tour des avantages importants qui doivent le faire préférer, toutes les fois qu'il s'agit d'une question du domaine du quatrième degré.

En résumé, les figures géométriques élémentaires que nous avons rencontrées jusqu'ici sont les suivantes [1] :

Désignations.	Notations.
Point	A
Vecteur	$\alpha = B - A$
Bivecteur	$[\alpha\beta] = [\gamma]$
Bipoint	$AB = [AB] = [A\alpha] = \omega$
Tripoint	$ABC = [ABC] = [A\alpha\beta] = [C\omega] = \varpi$
Spath (produit de 3 vecteurs)	$[\alpha\beta\gamma]$
Spath (produit de 4 points)	$ABCD = [ABCD] = [A\alpha\beta\gamma]$
Produit scalaire de 2 vecteurs	$[\alpha\|\beta] = [\beta\|\alpha]$

En y adjoignant les règles du produit progressif et régressif, on peut ramener un produit quelconque à ces formes élémentaires dans le cas où il s'agit de la *multiplication alternée*.

E. — Multiplication alternée des formes.

40. Si nous considérons deux formes F_r et F_s des degrés r et s et telles que $r + s \leqq 4$, nous pourrons obtenir le produit extérieur de ces formes en leur appliquant les règles de la multiplication alternée *progressive*. Le résultat de l'opération sera évidemment une forme F_{r+s}. D'ailleurs l'opération n'est pas toujours commutative, mais le renversement de l'ordre des facteurs ne fait que changer le signe du résultat dans le cas où la propriété commutative ne subsiste pas. Il en est ainsi par exemple pour deux formes F_1 dont le produit est une forme F_2.

On peut également former, d'après les règles précédentes, le produit *régressif* de deux formes F_r et F_s si la somme $r + s$ est supérieure à n. Dans ce cas il est clair d'après ce que nous avons vu (n° 35) que, si les deux formes ont un élément commun, le produit extérieur ainsi obtenu sera congruent à cet élément commun. Il lui sera non seulement congruent mais égal si on laisse subsister dans le produit les facteurs tels que $[ABCD]$, ..., dont la valeur est $+1$ ou -1 et dont la suppression peut avoir pour effet de changer le *signe* du résultat. Ainsi, le produit de deux plans représente leur ligne d'intersection ; le produit de trois plans leur point d'intersection et le produit de quatre plans le contenu du tétraèdre que ces plans limitent.

---

[1] Nous y avons ajouté le *trivecteur* ou produit de trois vecteurs qui dans le domaine du troisième degré est évidemment un multiple de e_1, e_2, e_3, c'est-à-dire un nombre, mais que nous n'utiliserons pas.

En se conformant aux règles du produit régressif, on obtiendra ces éléments exprimés à l'aide des sommets et des arêtes du *tétraèdre de référence*, c'est-à-dire des unités

$$A, \quad B, \quad C, \quad D.$$

$$\omega_1 = AB, \qquad \omega_2 = BC, \qquad \omega_3 = CD, \qquad \omega_4 = AC, \qquad \omega_5 = AD, \qquad \omega_6 = BD.$$

On trouvera une application de ce procédé au n° **42**.

Dans les exercices d'application que nous donnons au Chapitre suivant, nous supprimerons souvent les crochets de la notation grassmannienne, ce qui n'y présente pas d'inconvénient parce que l'on sait de quel genre de multiplication il s'agit. Rien n'empêche alors d'employer les signes ordinaires de la multiplication algébrique, sachant d'avance que les produits à obtenir sont toujours des produits extérieurs. C'est ainsi qu'au Chapitre IV une expression telle que la suivante

$$A(B - C)(C - D)$$

pourra être écrite au lieu de l'expression conforme à la notation grassmannienne

$$[A \quad B - C \quad C - D].$$

Cependant il est nécessaire d'employer les notations correctes quand la nature de la multiplication n'est pas définie à l'avance. En particulier la multiplication intérieure doit toujours se représenter par le signe | intercalé entre les facteurs en supprimant si on le veut les crochets extérieurs.

Il est d'usage de supprimer toujours les crochets et le signe | dans la multiplication des unités $e_1 e_2 e_3$ et d'écrire

$$e_1^2 \text{ au lieu de } e_1 | e_1$$

et

$$e_1 e_2 \text{ au lieu de } [e_1 e_2].$$

Il ne peut en effet y avoir d'hésitation sur la nature du produit $e_1 e_2$, attendu que $e_1 | e_2$ est nul (n° **30**).

CHAPITRE IV.

EXERCICES ET APPLICATIONS.
APPLICATIONS DES F_2 A LA STATIQUE ET A LA CINÉMATIQUE.

41. Nous donnerons d'abord quelques exercices sur les produits planimétriques et stéréométriques. Les règles de calcul sont toujours très simples ainsi qu'on a pu s'en apercevoir et il suffit d'un peu d'attention pour s'en rendre maître. Un certain nombre des exercices présentés ici est emprunté au Livre de Kraft cité dans l'Introduction.

I. *Produit planimétrique de trois côtés d'un triangle* AB, BC, CA. — Nous devons poser ici (n° 36).

$$[ABC] = 1.$$

On a alors par la règle des produits régressifs (n° 29)

$$|[BC.CA] = |BC|CA = AB = |C.$$

D'où en rétablissant le facteur $[ABC] = +1$ pour l'homogénéité

$$[BC.CA] = [ABC]C$$

et par suite

$$[AB.BC.CA] = [ABC]^2.$$

Ce produit est différent de zéro.

II. Le produit *planimétrique* de trois droites concourantes est nul. Soient les droites AB, AC, AD, on a

$$[AB.AC.AD] = [ABC].[AAD] = 0.$$

III. *Règle du double produit ou du facteur moyen* (L_2, 105-107). — Nous désignons ainsi un cas particulier d'une formule démontrée par Grassmann dans le cas d'un domaine de degré n et dont l'emploi est fréquent dans les applications, en nous bornant au cas de $n = 3$ ou $n = 4$.

Désignons avec Grassmann (A_2, 77) par *grandeur simple* une grandeur qui peut s'obtenir par le produit alterné de m grandeurs du premier degré. Les points, les droites, les plans et les nombres sont alors des grandeurs simples. Nous aurons le théorème suivant :

Quand A, B, C sont des grandeurs simples *et que leur produit est de degré nul* on a les formules

Règle du double produit..... $[AB.AC] = [ABC].A$
Règle du double produit..... $[AC.BC] = [ABC].C$
Règle du facteur moyen..... $[AB.BC] = [ABC].B$

Nous supposerons d'abord $n = 3$ puis $n = 4$ pour la démonstration.

Soient n le degré du domaine et p, q, r, les degrés de A, B, C. Puisque $[ABC]$ est de degré nul, $p + q + r$ est divisible par n et puisque A, B, C sont des grandeurs simples, p, q et r sont $< n$. On a donc, soit

$$p + q + r = n,$$

soit

$$p + q + r = 2n.$$

Soit d'abord $n = 3$. Les formules ci-dessus résultent alors immédiatement de l'application de la règle des produits régressifs

Soit maintenant $n = 4$. On aura $p + q + r = 4$ ou $p + q + r = 8$.

Dans le premier cas (en supposant par exemple que nous considérions la *règle du facteur moyen*, qui est la plus facile à retenir), A, B, C sont du premier degré ou du second au plus. Supposons d'abord A et C du premier degré, B sera alors du second. Prenons comme unités les points A, C, D, E en posant, ce qui est toujours possible,

$$B = [DE] \qquad \text{et} \qquad [ACDE] = 1.$$

On a alors

$$[AB.BC] = [ADE][DEC] = -CA = -[ED] = [B.$$

D'où

$$[AB.BC] = [ACDE].B = [ABC]B \qquad [\text{car } ACDE = ADEC \text{ (n° 32)}].$$

La démonstration serait la même si B était du premier degré, l'une ou l'autre des grandeurs A et C étant alors du second.

Supposons maintenant $p + q + r = 8$. Les nombres p, q, r étant inférieurs à 4, il faut que l'un d'eux soit égal à 2 et les deux autres à 3. Posons

$$P = [AB.BC].$$

Supposons par exemple que A soit d'ordre 2 et B et C d'ordre 3. On a

$$|P = |AB|BC.$$

Soient A', B', C' les compléments de A, B, C. Nous aurons

$$|AB = A'B', \qquad |BC = B'C'.$$

D'où

$$|P = [A'B'.B'C'] = [A'B'C'].B' = [|A|B|C]|B = |[ABC].B.$$

Démonstration analogue pour les autres cas.

IV. *Produit stéréométrique de deux tripoints situés dans des plans parallèles.* Soient ABC, DEF les deux tripoints. Écrivons

$$[ABC.DEF] = [A(B-A)(C-A).D(E-D)(F-D)].$$

Les tripoints étant dans des plans parallèles, on peut écrire

$$(E-D)(F-D) = m(B-A)(C-A) = m\alpha\beta.$$

D'où

$$[ABC.DEF] = m[A\alpha\beta][D\alpha\beta].$$

Mais A, D et $\alpha\beta$ sont des grandeurs *simples* et la somme de leurs degrés est nulle ($= 4$). On peut donc appliquer la règle du produit double, ce qui donne

$$\begin{aligned} m[A\alpha\beta][D\alpha\beta] &= m[AD\alpha\beta][\alpha\beta] \\ &= [AD(E-D)(F-D)][\alpha\beta] \\ &\quad [ADEF][\alpha\beta]. \end{aligned}$$

Le produit est donc un bivecteur (*voir* n° 39).

V. Soient ABC, ABD, ACD les trois faces d'une pyramide dont le sommet est A, on a

$$(ABC)(ABD)(ACD) = [ABCD]^2 A.$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} [(ABD).(ACD)] &= -CB = |AD, \\ [(ABC).AD] &= D.BC = |A. \end{aligned}$$

D'où en rétablissant l'homogénéité on a la formule proposée.

VI. *Le produit de trois plans collinéaires* (c'est-à-dire passant par une même droite) *est nul.*

VII. Le produit des quatre faces d'une pyramide est

$$ABC.ABD.ACD.BCD = [ABCD]^3.$$

Démonstration analogue à V.

VIII. *Le produit de quatre plans concourants en un point est nul.* Démonstration analogue.

IX. *Soient* A, B, C *trois points, on a*

$$A|[BC] = |[BC].A,$$
$$[AB]|C = |C[AB].$$

Posons $|[BC] = [FG]$, on a

$$A|[BC] = A[FG] = [AFG] = [FGA] = [FG]A = |[BC].A.$$

De même posons $|C = [FGH]$, on a

$$[AB]|C = [AB][FGH] = [FGH][AB].$$

Cette dernière égalité résulte de ce que l'on a

$$|[AB][DEF] = |AB|DEF.$$

Mais

$$|DEF = |C = -C \text{ [n° 28, (7)]}.$$

D'où

$$|[AB][DEF] = -|AB.C = -C|AB \text{ (par IX)}$$

et

$$|[DEF][AB = |DEF|AB = -C|AB.$$

D'où

$$[AB][DEF] = [DEF][AB] = |C[AB].$$

D'où l'on a la deuxième équation proposée.

X. On démontre de même que l'on a

$$|[AB]|[CD] = |[CD][AB],$$

poser

$$|[CD] = [FG],$$

et

$$[AB]|[CDE] = |[CDE][AB],$$

poser

$$|[CDE] = F.$$

XI. *Démontrer la formule*

$$[PQS][PQR] = [PQRS][PQ].$$

Il suffit d'appliquer la règle du double produit en prenant les points P, Q, R, S comme unités.

XII. *Une somme S de bipoints est réductible à un bipoint unique lorsque l'on a*

$$[SS] = 0$$

et seulement dans ce cas (*A*₂, **286**).

a. Si S est un bipoint AB, on a

$$[SS] = [AB, AB] = 0;$$

b. Si $[SS] = 0$, on a

$$S = AB + CD \text{ (n° 23, III)}.$$

D'où

$$0 = [SS] = (AB + CD)(AB + CD) = [ABCD] + [CDAB] = 2[ABCD]$$

ou

$$ABCD = 0.$$

Par suite A, B, C, D sont coplanaires et S se réduit à un bipoint (n° 23, I).

XIII. *Une somme de bivecteurs est un bivecteur.*

Il suffira de considérer deux bivecteurs et de les amener par un déplacement convenable à avoir un côté commun, ce qui est toujours possible d'après la définition du bivecteur, puisque celui-ci peut se mouvoir à volonté dans des plans parallèles. Les deux bivecteurs seront alors de la forme

$$[\alpha\beta] + [\alpha\gamma]$$

et l'on montrera que leur somme est $[\alpha(\beta + \gamma)]$.

Le théorème s'étend, de proche en proche, à un nombre quelconque de bivecteurs.

XIV. *Démontrer la formule*

$$[\alpha\beta|\gamma] + \beta[\alpha|\gamma] - \alpha[\beta|\gamma]$$

où α, β, γ *sont trois vecteurs quelconques.*

On posera

$$\alpha = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3,$$
$$\beta = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3,$$
$$\gamma = c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3,$$

et il suffit alors d'effectuer les calculs des deux membres pour vérifier cette identité. Nous retrouverons cette *très importante formule*, dite *formule du double produit vectoriel*, sous une forme un peu différente, au n° 64.

42. Coordonnées barycentriques. Nous avons vu (n° 15) qu'un point quelconque P de l'espace peut s'exprimer sous la forme

$$P = \frac{xA + yB + zC + uD}{x + y + z + u},$$

où A, B, C, D sont quatre points indépendants de l'espace et x, y, z, u quatre scalars réels quelconques. On peut poser

$$(a) \qquad x + y + z + u = 1,$$

et alors on a

$$P = xA + yB + zC + uD.$$

On peut déterminer les nombres x, y, z, u, qui s'appellent les *coordonnées barycentriques du point* P. Multiplions les deux membres par BCD, les coefficients de y, z, u s'annulent et l'on a

$$[PBCD] = x[ABCD],$$

où

$$x = \frac{[PBCD]}{[ABCD]}.$$

On aurait de même

$$y = -\frac{[PCDA]}{[ABCD]}, \qquad z = \frac{[PDAB]}{[ABCD]}, \qquad u = -\frac{[PABC]}{[ABCD]}.$$

On voit que P étant un point quelconque de l'espace, on a la relation

$$P[ABCD] = A[PBCD] + B[PCDA] + C[PDAB] + D[PABC]$$

entre cinq *tétraèdres* et cinq points, les tétraèdres étant pris avec leur signe (¹).

On peut la mettre sous la forme symétrique

$$P[ABCD] = A[PBCD] + B[APCD] + C[ABPD] + D[ABCP],$$

le point P remplaçant dans l'expression de ABCD le point dont le

(¹) Le tétraèdre dont les sommets sont les points ABCD a pour volume $\frac{1}{6}[ABCD]$. Son signe est défini par celui du spath ABCD.

tétraèdre est le coefficient. L'équation (a) donne la relation

$$[PBCD] + [APCD] + [ABPD] + [ABCP] = [ABCD]$$

entre cinq tétraèdres (pris avec leur signe) [1].

Considérons deux points

$$P = xA + yB + zC + uD,$$
$$Q = x'A + y'B + z'C + u'D,$$

nous obtenons par multiplication extérieure (où nous avons supprimé les crochets | |)

$$PQ = (xy' - yx')AB + (xz' - zx')AC + (xu' - ux')AD$$
$$+ (yz' - zy')BC + (yu' - uy')BD + (zu' - uz')CD$$

ou bien

$$(b) \qquad PQ = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_3 + a_4\varepsilon_4 + a_5\varepsilon_5 + a_6\varepsilon_6,$$

en posant

$$\varepsilon_1 = AB, \quad \varepsilon_2 = AC, \quad \varepsilon_3 = AD, \quad \varepsilon_4 = BC, \quad \varepsilon_5 = BD, \quad \varepsilon_6 = CD,$$

et $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_6$ étant les mineurs de la matrice

$$\begin{Vmatrix} x & y & z & u \\ x' & y' & z' & u' \end{Vmatrix}$$

Les six coefficients de l'équation (b), que l'on appelle *coordonnées barycentriques de la droite* PQ, ne sont pas indépendants ; on peut voir qu'il existe entre eux la relation

$$a_1a_6 + a_2a_5 + a_3a_4 = 0,$$

de sorte que le bipoint PQ dépend de *cinq* coefficients scalars, comme cela devait être.

Si nous prenons un troisième point

$$R = x''A + y''B + z''C + u''D,$$

nous obtiendrons le plan PQR, ou tripoint sous la forme

$$[PQR] = p_1\varpi_1 + p_2\varpi_2 + p_3\varpi_3 + p_4\varpi_4.$$

---

[1] Un calcul analogue dans le *domaine du plan* donnerait l'équation

$$P[ABC] = [PBC]A + [PCA]B + [PAB]C.$$

en posant

$$\varpi_1 = [BCD], \quad \varpi_2 = [CDA], \quad \varpi_3 = [DAB], \quad \varpi_4 = [ABC],$$

et les coefficients p_1, p_2, p_3, p_4 étant les mineurs de la matrice

$$\begin{vmatrix} x & y & z & u \\ x' & y' & z' & u' \\ x'' & y'' & z'' & u'' \end{vmatrix}$$

ces mineurs étant formés dans l'ordre des lettres. Ainsi le coefficient de [CDA] est

$$\begin{vmatrix} z & u & x \\ z' & u' & x' \\ z'' & u'' & x'' \end{vmatrix}$$

43. **Coordonnées pluckériennes.** — On obtient les coordonnées pluckériennes de la droite en partant du système de représentation du point de l'article **21**. Soient

$$P = A + xe_1 + ye_2 + ze_3,$$
$$Q = A + x'e_1 + y'e_2 + z'e_3$$

deux points déterminés au moyen des quatre unités A, e_1, e_2, e_3. Nous aurons, par multiplication extérieure,

$$\begin{aligned} PQ = {} & (x' - x)\,Ae_1 + (y' - y)\,Ae_2 + (z' - z)\,Ae_3 \\ & + (xy' - yx')\,e_1e_2 + (yz' - zy')\,e_2e_3 + (zx' - xz')\,e_3e_1. \end{aligned}$$

Ainsi, tandis que dans l'expression barycentrique un bipoint s'exprimait au moyen de *six arêtes* du tétraèdre de référence, il s'exprime maintenant au moyen de *trois bipoints* rectangulaires et de *trois bivecteurs*. Les coefficients de ces bipoints et de ces bivecteurs unitaires sont les *coordonnées pluckériennes* de la droite. Comme elles sont au nombre de six, elles ne sont pas indépendantes et si nous écrivons

$$PQ = b_1Ae_1 + b_2Ae_2 + b_3Ae_3 + b_4|e_1 + b_5|e_2 + b_6|e_3 \text{ (1)},$$

nous avons entre les six coordonnées la relation

$$b_1b_4 + b_2b_5 + b_3b_6 = 0.$$

---

(1) On adopte ordinairement pour les coordonnées pluckériennes la notation

$$PQ = X(Ae_1) + Y(Ae_2) + Z(Ae_3) + L(e_2e_3) + M(e_3e_1) + N(e_1e_2).$$

Elles sont alors liées par la relation $LX + MY + NZ = 0$.

On pourrait obtenir également les coordonnées pluckériennes du plan, mais elles sont plus compliquées et n'ont pas pour nous d'intérêt immédiat.

44. Commutativité d'un produit. Dans un grand nombre de cas, en géométrie synthétique, on n'a pas besoin de connaître la valeur complète d'un produit planimétrique ou stéréométrique, mais seulement sa signification synthétique. Cette dernière s'obtient au moyen du degré du produit, c'est-à-dire du *reste* de la division de la somme des degrés des facteurs par le degré du domaine.

La question qui se pose pratiquement est de savoir dans quels cas les facteurs du produit sont commutatifs sans que la signification géométrique du produit soit altérée. Les règles à suivre ont été déterminées minutieusement par Grassmann et ne laissent pas que d'être assez compliquées. Mais en nous bornant au domaine de l'espace géométrique, on peut les ramener à quelques règles assez simples que nous allons donner ci-dessous.

I. Dans un produit stéréométrique (ou planimétrique) composé de *deux facteurs*, on peut changer l'ordre de ces facteurs.

En effet, soient A et B deux points, on a

$$AB = -BA.$$

De même, on verrait qu'il en est ainsi pour tout autre produit de *deux* facteurs [1].

II. On peut toujours ajouter à chaque facteur ou à une série de facteurs d'un produit un facteur *de degré nul* sans changer son caractère géométrique.

Car on a toujours

$$m\Omega = \Omega.$$

III. Dans un produit de *deux* à *quatre points* ou *plans*, on peut ranger les facteurs dans un ordre quelconque.

Par exemple, pour les points on a, en supprimant les crochets,

$$AB \equiv BA,$$
$$ABC \equiv [AB]C \equiv C[AB] \equiv BCA \equiv CAB \equiv \ldots.$$
$$ABCD \equiv BCDA \equiv BADC \equiv BCDA \equiv \ldots.$$

[1] Cela signifie, bien entendu, que les deux produits obtenus sont *congruents*, mais non pas qu'ils sont *égaux*.

car le premier représente toujours un bipoint, le second un tripoint, le troisième un tétraèdre ayant même teneur et même support (droite ou plan).

Dans le cas des plans, on a

$$\varpi_1 \varpi_2 \equiv \varpi_2 \varpi_1 \equiv \text{droite d'intersection},$$

$$\varpi_1 \varpi_2 \varpi_3 \equiv \varpi_2 \varpi_3 \varpi_1 \equiv \varpi_3 \varpi_2 \varpi_1 \equiv \text{point d'intersection},$$

$$\varpi_1 \varpi_2 \varpi_3 \varpi_4 \equiv \varpi_2 \varpi_3 \varpi_1 \varpi_4 \equiv \ldots \equiv \text{à un nombre (degré } 3 \times 4).$$

IV. Un produit reste congruent à lui-même quand on échange entre eux deux facteurs *consécutifs* dont l'un est *compris* dans l'autre.

Par exemple, on peut échanger un point et une droite qui se suivent si le point est sur la droite.

V. Un produit P reste congruent à lui-même si l'on renverse l'ordre de ses facteurs ou si l'on met entre parenthèses une série quelconque de ses *derniers* facteurs et qu'on renverse ceux-ci dans la parenthèse, à condition que le produit P soit *d'ordre nul*.

VI. Un produit stéréométrique d'un point A et de deux droites ε_1 et ε_2 *qui se coupent* reste congruent à lui-même si l'on change l'ordre des deux droites. C'est-à-dire

$$A \varepsilon_1 \varepsilon_2 \equiv A \varepsilon_2 \varepsilon_1.$$

VII. Si un produit *de degré nul* contient lui-même un facteur de degré nul, l'autre facteur est aussi de degré nul et, par conséquent, le produit ne peut s'annuler que si l'un des facteurs est nul.

VIII. La même proposition VI est vraie lorsque le facteur A est un *plan* au lieu d'être un point. C'est-à-dire

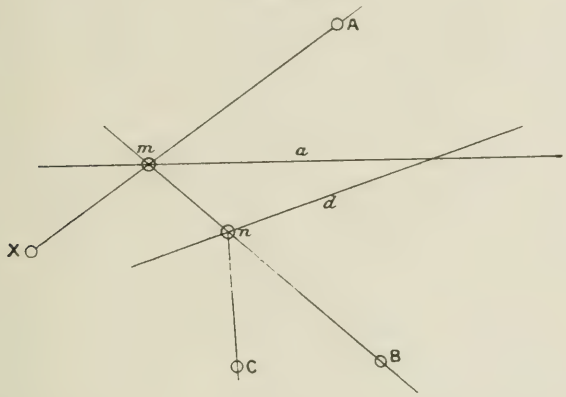
$$\varpi \varepsilon_1 \varepsilon_2 \equiv \varpi \varepsilon_2 \varepsilon_1.$$

Le lecteur démontrera sans difficulté les propositions IV à VIII que nous lui laissons à titre d'exercices. La démonstration générale pour un domaine de degré n se trouve dans A_2, 313 et suivants.

45. Perspectivité et projectivité dans le plan. Soit A un point et a une droite du plan. Si nous représentons par X un point quelconque de ce plan, la droite qui joint les points A et X sera congruente au produit X A. Le point m de rencontre de cette droite et de a est le point X Aa. Lorsque nous faisons varier X, le point X Aa décrit

la droite (a) (*fig.* 17) considérée comme série de points et représente donc, quand X varie, la *ponctuelle* (a). Au faisceau (XA) correspond donc la *ponctuelle* XAa ou (a). La relation ainsi établie entre le faisceau XA ou (A) et la ponctuelle (a) s'appelle *perspectivité* et l'on dit que le faisceau (A) et la ponctuelle (a) sont *perspectifs*.

Fig. 17.



Supposons maintenant que nous menions par les différents points m de la ponctuelle (a) des droites passant par un point fixe B. Chacune de ces droites est représentée par le produit mB ou $(XAaB)$ et, quand X varie, cette expression représente un nouveau faisceau (B) qui coupe le premier suivant la ponctuelle (a). D'ailleurs (B) est perspectif à (a) et (a) à (A) ; on dit alors que (A) et (B) sont *perspectifs entre eux*.

Soit X le point de rencontre variable des faisceaux (B) et (A). Ce point doit se trouver sur la droite $(XAaB)$; on a donc

$$(XAaBX) = 0, \tag{1}$$

équation qui montre que les trois points XAa, B, X sont en ligne droite. Or, ceci exige ou bien que $X \equiv XAa$ ou bien que les trois points A, B, X soient en lign droite. C'est-à-dire

$$(XAa) \equiv X \qquad \text{ou} \qquad (XAB) = 0.$$

La première équation donne $Xa = 0$ et montre que X est sur la droite a. La seconde indique que X est par la droite AB. Par suite, l'équation (1) se décompose en *deux droites*, a et AB.

Soit maintenant une droite qui coupe le faisceau (B). A chaque droite $XAaB$ du faisceau correspond un point $n \equiv XAaBd$ de la

droite d et le faisceau (B) correspondra à la ponctuelle (d) et inversement.

On dit encore que (A), (B), (d) [1] sont perspectifs entre eux. Mais la relation entre (A) et (d) prend le nom de *projectivité* et l'on dit que ces figures sont *projectives*.

Menons par les points (XAaBd) de d des droites se coupant en un même point C, nous obtenons un nouveau faisceau (C) perspectif avec la ponctuelle (d) et le faisceau (B) et projectif avec la ponctuelle (a) et le faisceau (A). On peut continuer de la même façon et l'on obtient la proposition suivante :

Dans un produit planimétrique comprenant alternativement comme facteurs des faisceaux et des droites, deux facteurs sont perspectifs quand ils ne sont pas séparés par plus d'un facteur. Dans le cas contraire, ils sont projectifs.

Nous avons vu plus haut que le lieu de l'intersection de deux faisceaux perspectifs se compose de *deux droites*. Celui de l'intersection de deux faisceaux projectifs, c'est-à-dire de deux faisceaux tels que (A) et (C), se trouve sur la droite XAaBdC. On a donc

$$\text{XA}a\text{B}d\text{CX} = 0. \tag{2}$$

Nous allons étudier ce lieu en supposant qu'aucun de deux éléments consécutifs ne coïncide avec l'autre. Comme il contient deux fois le point X, on l'appelle *courbe du deuxième ordre*.

Le produit (2) est de degré nul (somme des degrés = 9). Les points A, B, C sont fixes, ainsi que les droites a et d. On voit que la courbe peut être regardée comme le lieu du sommet d'un triangle (*fig.* 18) dont les trois côtés passent par trois points fixes A, B, C, et dont les deux autres sommets s'appuient sur deux droites fixes.

L'équation est satisfaite pour X = A, X = C. La courbe passe donc par les points A et C.

Soit G le point de rencontre de a et d. Si nous construisons l'expression GAaBdCX, nous avons successivement

$$\text{GA}, \quad \text{GA}a = \text{G}, \quad \text{GB}, \quad \text{GB}d = \text{G}, \quad \text{GCX}.$$

L'équation est donc satisfaite si GCX = 0 ou X = G. Le point G est donc sur la courbe. On verrait de même que les points E, F s'y

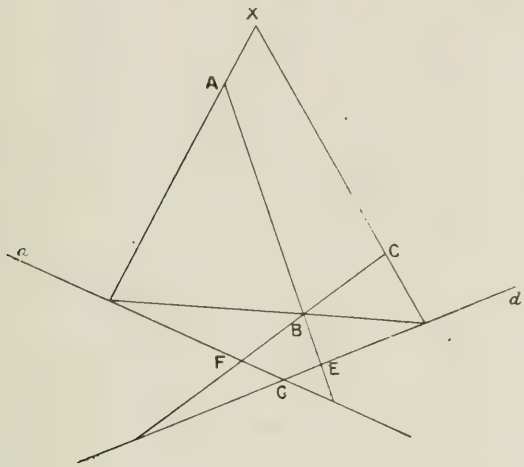
---

[1] La notation (a) désigne la ponctuelle formée par la droite a considérée comme série de points et la notation (B) le faisceau de droites émanant du point B.

trouvent aussi ; mais, en remarquant que la connaissance des points E, F, G détermine les droites a et d, on voit que l'on a le théorème suivant :

Une courbe du deuxième ordre est déterminée par cinq points.

Fig. 18.



La courbe dont nous nous occupons s'appelle en effet *courbe du deuxième ordre*, parce qu'elle jouit de la propriété d'être rencontrée par une droite quelconque en *deux* points. On peut le voir de la manière suivante. Considérons une droite passant par le point A, soit AP, et ne passant par aucun des points C, E, F, G. Le point P sera sur la courbe si l'on a

$$(\mathrm{PA}a\mathrm{B}d\mathrm{C})\,\mathrm{X} = 0.$$

Le point X doit donc se trouver sur AP et sur la droite $\mathrm{PA}a\mathrm{B}d\mathrm{C}$ qui passe par C, tandis que AP n'y passe pas. Donc AP rencontre la courbe en un second point seulement.

Remarquons que l'on peut écrire l'équation de la courbe

$$(\mathrm{XA})(\mathrm{GF}).(\mathrm{AE})(\mathrm{GF}).(\mathrm{GE})(\mathrm{GX}) = 0.$$

C'est un produit planimétrique de degré nul. Cette équation exprime le THÉORÈME DE PASCAL :

Les diagonales opposées d'un hexagone inscrit à une courbe du second degré se coupent en trois points situés en ligne droite.

46. Courbe de la deuxième classe. Considérons le produit d'ordre nul obtenu en remplaçant dans (2) les points par des droites et réciproquement, soit

$$(3) \qquad (\sigma\alpha A\beta D\gamma\sigma) = 0,$$

où σ est une droite variable, α, β, γ des droites fixes, et A et D des points fixes. On a successivement

$$\sigma\alpha = P, \quad \sigma\alpha A = PA, \quad \sigma\alpha A\beta = Q, \quad \sigma\alpha A\beta D = QD,$$

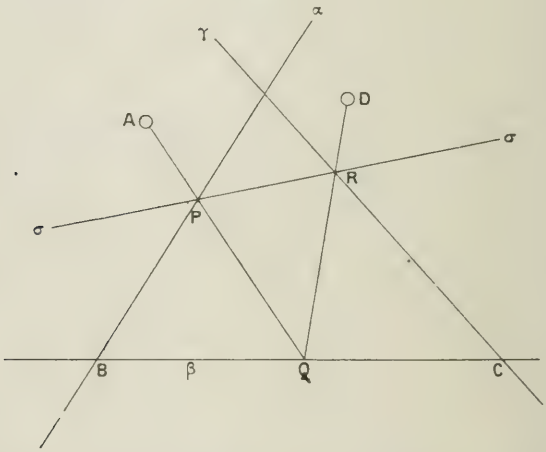
et alors le point R de rencontre de QD et de γ doit être sur σ.

On a donc

$$\sigma = PR.$$

Or, les ponctuelles P et Q (*fig.* 19) sont perspectives, les ponctuelles Q et R le sont également. Par suite, P et R sont projectives et l'on voit que l'équation (3) représente des droites qui *joignent des*

Fig. 19.



points homologues de deux ponctuelles projectives, ce qu'on exprime simplement en disant :

L'équation (3) *est le résultat de deux ponctuelles projectives.*

Remarquons que si nous considérons le triangle variable PQR, ses trois sommets glissent sur les droites fixes α, β, γ et deux des côtés passent par les points fixes A et D. On peut donc dire que le lieu (3) est obtenu au moyen du troisième côté d'un triangle dont les deux

premiers côtés passent par des points fixes, tandis que les trois sommets glissent sur trois droites fixes.

On voit immédiatement que les droites α et γ satisfont à l'équation. La droite BD est également une droite σ, car on a successivement

$$BD\alpha = B, \qquad BD\alpha A \equiv BA, \qquad BD\alpha A\beta \equiv B, \qquad BD\alpha A\beta D = BD,$$
$$BA\alpha A\beta D\gamma = BD \quad \text{et alors} \quad (BD)\sigma = (BD).(BD) = 0.$$

On verrait de même que AC est une droite σ, et aussi AD. Nous avons donc les cinq droites α, γ, BD, AC et AD. Mais ces droites définissent parfaitement les trois droites α, β, γ et les deux points A et B. Donc on a le théorème suivant :

Une courbe de seconde classe est définie par cinq droites.

Le lieu ainsi obtenu s'appelle *courbe de seconde classe*, parce que par le point P passent *deux* droites du lieu, à savoir α et σ.

Les droites telles que PR sont coupées par la droite infiniment voisine en un point qui est un point de leur enveloppe. D'après cela, l'enveloppe est une courbe caractérisée par le fait que, d'un point quelconque du plan, on peut lui mener deux tangentes et deux seulement, qui sont les deux droites σ passant par ce point.

En posant $BD = \delta$, $AC = \varepsilon$, $AD = \zeta$, on a $A \equiv \varepsilon\zeta$, $D = \delta\zeta$ et alors l'équation devient, avec $\beta \equiv (\alpha\delta).(\varepsilon\gamma)$,

$$(\sigma\alpha)(\varepsilon\zeta).(\alpha\delta)(\varepsilon\gamma).(\delta\zeta)(\gamma\sigma) = 0,$$

qui définit le lieu par le *théorème* bien connu de Brianchon.

Supposons qu'une courbe du deuxième ordre soit définie par cinq points A, C, F, G, E (*fig.* 18) ; on peut écrire

$$a = FG, \qquad d \equiv EG, \qquad B = AE.FC,$$

de sorte que l'équation (2) s'écrit

$$XA(FG)(AE.FC)(EG)CX = 0.$$

Supposons alors que le point E se rapproche indéfiniment du point A, et le point F du point C, de sorte que AE et CF deviennent des tangentes α_1 et γ_1, à la courbe en A et C. On aura l'équation

$$XA(CF)(\alpha_1\gamma_1)(GA)CX = 0.$$

Cette équation est satisfaite par un point quelconque de la courbe.

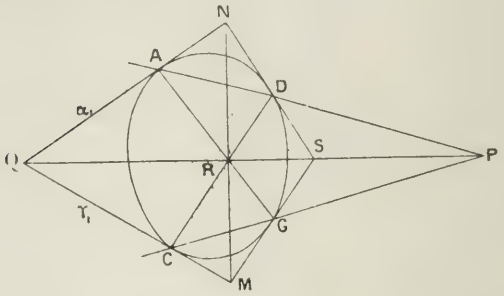
Considérons alors un point D quelconque. Nous aurons

$$DA(CG)(\alpha_1\gamma_1)(GA)CD = 0.$$

équation qui exprime que les trois points P, Q, R (*fig.* 20) sont en ligne droite.

Un calcul semblable montrerait que DS et GS étant tangentes en D

Fig. 20.



et G, les points P, S, R sont en ligne droite (il suffit de permuter les données). Donc Q, R, S sont en ligne droite. Une autre permutation des lettres montrerait de même que les points M, R, N sont en ligne droite. On a donc le théorème suivant :

Les deux diagonales d'un quadrilatère circonscrit à une courbe du second degré (MQNS) *et les diagonales du quadrilatère ayant pour sommets les points de contact* (CADG) *se rencontrent au même point.*

A l'aide de ce théorème, il est facile de démontrer une proposition relative à l'arrangement d'une certaine figure par rapport à une courbe de seconde classe que l'on appelle *configuration de Maclaurin*. Elle consiste dans un arrangement de points et de droites défini par le théorème suivant :

Configuration de Maclaurin. — Si l'on considère le quadrilatère complet déterminé par quatre tangentes à une courbe de seconde classe et le quadrangle complet déterminé par leurs quatre points de contact, les diagonales du premier et les droites qui joignent les points d'intersection des côtés opposés du second *coïncident*.

Nous le proposons comme exercice.

Il en résultera immédiatement le théorème suivant :

Il y a identité entre les courbes de deuxième ordre et de deuxième classe.

47. Produits stéréométriques dans l'espace. — Si nous passons du domaine du plan ($n = 3$) à celui de l'espace ($n = 4$), nous obtiendrons des résultats analogues, mais les figures fondamentales sont maintenant au nombre de quatre : le point, la ligne, le plan, le tétraèdre. De plus, à cause de l'introduction d'une troisième dimension de l'espace, il y a lieu maintenant de distinguer deux sortes d'émanences que l'on pourrait appeler *émanence planaire* et *émanence spatiale*. Ainsi des lignes émanentes d'un point peuvent être situées toutes dans un même plan : elles forment alors un *faisceau de droites ;* ou prendre toutes les directions dans l'espace autour de ce point : elles forment alors une *gerbe de droites*.

On pourra de même obtenir un *faisceau de plans* lorsque leurs normales seront toutes parallèles à un même plan et que ces plans passeront par une même droite ; ou une *gerbe de plans*, si l'on considère tous les plans passant par un même point.

De même que nous avons considéré une droite dans le plan comme ensemble de ses points, ce que nous avons appelé une *ponctuelle*, nous pourrons regarder un plan comme l'ensemble *de ses points ou de ses droites*. Le plan considéré à ce point de vue sera appelé un *champ linéaire* dans le second cas et *ponctuel* dans le premier. Un champ ponctuel est de degré *un* comme le point et un champ linéaire de degré *deux* comme la droite.

Il sera toujours facile, d'après cela, de reconnaître la nature de la figure représentée par un produit stéréométrique. Ce produit représentera un point (ou un champ ponctuel), une droite (ou un champ linéaire), un plan, ou un nombre suivant que le reste de la division de la somme des degrés des facteurs par le degré 4 du domaine sera 1, 2, 3 ou 0. Soient, par exemple, X un point variable dans tout l'espace et A un point fixe. On aura

$XA \equiv$ la gerbe de rayons issue de A ;

$XA\varpi_1 \equiv$ champ ponctuel ϖ_1. Le champ ϖ_1 et le point A sont *perspectifs ;*

$XA\varpi_1 B = (XA\varpi_1)B \equiv$ gerbe de rayons issue de B. Les gerbes (A) et (B) sont *perspectives*. Le plan ϖ_1 s'appelle *plan perspectif ;*

$XA\varpi_1 B\varpi_2 \equiv$ champ ponctuel $\varpi_2 \equiv$ intersection de la gerbe (B) et du plan ϖ_2. Les champs ϖ_1 et ϖ_2 sont *perspectifs*. La gerbe (A) et le champ ϖ_2 sont *projectifs ;* et ainsi de suite. On peut énoncer la *proposition suivante :*

Si, dans un produit stéréométrique, on a alternativement après

un point variable des points et des plans fixes, et si deux facteurs consécutifs ne sont pas incidents, le produit donne lieu alternativement à des gerbes et à des champs ponctuels qui sont perspectifs s'ils ne sont pas séparés par plus d'un facteur et projectifs dans le cas contraire.

On peut considérer de même les produits stéréométriques successifs

$$\varpi\varpi_1, \quad \varpi\varpi_1 A, \quad \varpi\varpi_1 A\varpi_2, \quad \varpi\varpi_1 A\varpi_2 B, \quad \ldots.$$

où les ϖ sont des plans et A, B, ... des points et qui représentent successivement

I. Le *champ linéaire* ϖ_1 formé des intersections du plan variable ϖ et du plan fixe ϖ_1.

II. La gerbe de plans de centre A perspective au champ ϖ_1.

III. Le champ linéaire ϖ_2 perspectif au champ ϖ_1.

IV. La gerbe de plans de centre B perspective à (A) et projective à ϖ_1, etc.

Un produit tel que

$$X\alpha\beta\gamma\delta\ldots,$$

dans lequel le point variable X n'est suivi que de droites dont deux consécutives ne se coupent pas, donnera successivement

$X\alpha$ — faisceau de plans d'axe α.
$X\alpha\beta$ — ponctuelle β perspective au faisceau (α).
$X\alpha\beta\gamma$ — faisceau de plans d'axe γ perspectif à la ponctuelle (β) et au faisceau de plans $X\alpha$,
$X\alpha\beta\gamma\delta$ — ponctuelle δ perspective au faisceau (γ) et projective au faisceau $X\alpha$, etc.

D'où la proposition. Si un produit stéréométrique est composé d'un point variable suivi de droites fixes dont deux consécutives ne se rencontrent pas, ce produit donne alternativement des faisceaux et des ponctuelles, et deux éléments qui ne sont pas séparés par plus d'un facteur sont perspectifs, sinon ils sont projectifs.

De même un produit tel que

$$\varpi\alpha\beta\gamma\delta\ldots,$$

dans lequel ϖ est un plan mobile et α, β, γ, ... des droites fixes, donnera successivement les mêmes résultats en posant

$$\varpi\alpha = X = \text{ponctuelle } \alpha$$

et alors

$$\varpi\alpha\beta \equiv \text{faisceau de plans d'axe } \beta,$$

$$\varpi\alpha\beta\gamma \equiv \text{ponctuelle } \gamma \text{ perspective au faisceau } (\beta), \text{ etc.}$$

Remarque. Il est clair que les produits stéréométriques que nous venons de considérer ne *peuvent jamais s'annuler*.

Comme nous devons donner d'autres applications d'un genre différent des principes posés dans les précédents Chapitres, nous ne pouvons nous attarder plus longtemps à ces applications dans un ordre d'idées spécial, et nous renverrons aux Traités spéciaux ceux de nos lecteurs que cette question intéresse particulièrement [1]. Nous nous contenterons d'en faire une brève application avant de passer à un autre genre d'illustration de ces principes.

Considérons l'équation

$$P = X\alpha\beta\gamma X = 0,$$

dans laquelle X est un point variable, et α, β, γ des droites qui ne se rencontrent pas. Cette équation est de degré nul et contient deux fois le point X. Elle représente un lieu géométrique du second ordre. Si le point X est sur la droite α, on a $P = 0$. La droite α fait donc partie du lieu. D'autre part, on peut écrire (n° 44, V)

$$P = X\gamma\beta\alpha X,$$

ce qui montre que la droite γ fait aussi partie du lieu.

Soit alors X un point du lieu. $X\alpha$ est un plan passant par X et α. Ce plan coupe β en un point $X\alpha\beta$. L'expression $X\alpha\beta\gamma$ représente le plan passant par γ et par le point $X' = X\alpha\beta$. Ce plan devant passer par le point X, on voit que XX' rencontre γ. Comme XX' est d'autre part dans le plan $X\alpha$, cette droite rencontre donc les trois droites α, β, γ, dites les *directrices* de la surface.

D'autre part, un point quelconque de la droite XX' satisfera à l'équation puisqu'il donne lieu aux mêmes constructions géométriques. Il en résulte :

Le lieu géométrique $P = 0$ est le *lieu des droites de l'espace qui rencontrent trois directrices* α, β, γ.

On l'appelle *surface réglée du second ordre*.

---

(1) *Cf.* en particulier A_2, Section I, Chap. V; KRAFT, (*loc. cit.*), Chap. IV, Section V. JAHNKE, *Vorlesungen über Veklorenrechnung*, Section II, Chap. XIII et suivants. — *Cf.* aussi MEHMKE, *Vorlesungen über Punkt und Vectorenrechnung*, Erster Band, p. 154 et suiv.

Comme exercice on pourra montrer que si α, sans rencontrer β, rencontre γ, l'équation représente deux plans qui sont le plan commun à α et γ et le plan mené par β et par le point commun à α et β.

On montrera de même que l'équation

$$X\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon X = 0,$$

où α rencontre ε, représente un *cône du second ordre* dont le sommet est au point de rencontre S de α et de ε (on suppose que deux droites consécutives ne se rencontrent pas).

De même on verra que l'équation

$$X\alpha\delta\alpha X = 0$$

est satisfaite par un point quelconque de l'espace.

Dans son Ouvrage déjà cité, F. Krafft étudie complètement au n° 54 (p. 200 et suivantes) les cas qui se présentent dans la réduction de l'équation générale de la surface réglée du second ordre

$$X\alpha\delta\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\ldots\alpha_n\beta_n\gamma X = 0$$

et nous devons y renvoyer le lecteur désireux d'approfondir la question.

48. **Application à la Cinématique et à la Statique du solide.** — Les grandeurs que l'on considère spécialement en Cinématique sont les *rotations* et les *translations infinitésimales*. Une rotation infinitésimale est complètement déterminée lorsque l'on connaît son axe, le sens de la rotation autour de cet axe et la grandeur de la rotation instantanée, c'est-à-dire de la vitesse angulaire à l'instant considéré. Or ces éléments seront parfaitement déterminés en grandeur et situation, si nous représentons la rotation par un *bipoint* dont le support est la droite située suivant l'axe de rotation, dont la longueur (le module) a pour valeur la vitesse angulaire, et dont le sens est tel que la rotation autour de l'axe pour un observateur placé dans sa direction, soit positive, c'est-à-dire semble avoir lieu en sens inverse des aiguilles d'une montre. *Un bipoint* représente donc convenablement une *rotation instantanée*.

Une translation instantanée suivant une certaine direction et avec une vitesse V s'obtient, comme on le sait, au moyen *d'un couple de rotations*, c'est-à-dire de deux rotations instantanées autour de deux axes parallèles, avec des vitesses angulaires égales mais de sens

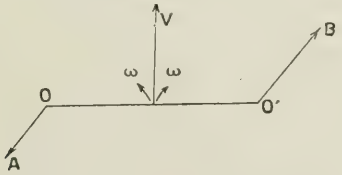
opposés, et telles que l'on ait la relation *numérique* (cf. *fig.* 21)

$$(1) \qquad \omega \times \overline{OO'} = V,$$

ω étant la valeur numérique de la vitesse angulaire, et $\overline{OO'}$ la distance des deux axes. Eu égard à la représentation ci-dessus de la rotation, la translation se représentera donc au moyen de deux bipoints de même module et de directions opposées, assujettis à la condition que l'aire du parallélogramme construit sur ces bipoints ait une grandeur constante. Ils peuvent d'ailleurs se déplacer ensemble dans leur plan ou se transporter simultanément dans un plan quelconque parallèle (et par conséquent perpendiculaire à la translation) sans qu'il y ait rien de changé pourvu que la condition (1) reste vérifiée. Une *translation* est donc parfaitement représentée par un *couple de bipoints parallèles*, c'est-à-dire par la somme

$$OA + O'B \qquad \text{où} \qquad A - O = O' - B.$$

Fig. 21.



On peut écrire

$$\begin{aligned} OA + O'B &= O(A - O) + O'(B - O') \\ &= O(A - O) - O'(A - O) = (O - O')(A - O), \end{aligned}$$

ce qui exprime un *bivecteur* (n° 39).

Ainsi, nous voyons que *le bipoint représente une rotation instantanée* et *un bivecteur représente une translation, et réciproquement.*

Si nous passons maintenant au domaine de la Statique, une *force*, qui se trouve déterminée par sa grandeur, sa direction, son sens, et la droite suivant laquelle elle est appliquée et le long de laquelle elle peut glisser, sera représentée complètement et exactement par un *bipoint*, qui possède les mêmes propriétés. Le module du bipoint sera égal à la grandeur de la force, et son support sera la droite d'application de la force.

Un *bivecteur* [deux bipoints opposés de même module, mais dont les supports ne coïncident pas (*fig.* 21)], représentera donc mainte-

nant une somme de deux forces égales, parallèles, de directions opposées et non portées par la même droite, c'est-à-dire *un couple* [Poinsot]. L'aire du parallélogramme construit sur les deux vecteurs du bivecteur représente le *moment du couple*.

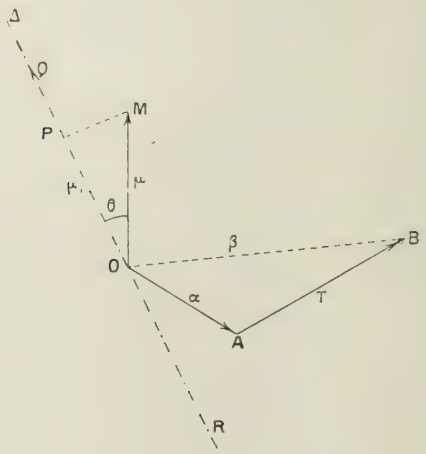
On considère aussi en Statique le *moment d'une force* par rapport à *un point* et le moment *par rapport à un axe*. Le moment par rapport à un point O est par définition un vecteur normal au plan déterminé par la force et le point ; son module est l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs OA et AB, et son sens est tel que la direction de la rotation de AB soit positive par rapport au moment μ. On voit (*fig.* 22) que le moment n'est autre chose que le *complément du bivecteur* $[\alpha\gamma]$ où l'on a

$$\alpha = A - O, \qquad \gamma = B - A.$$

Au point de vue statique, le moment est un *vecteur* et *non un bipoint*, ce qui s'accorde bien avec ce que nous avons dit aux n° 36 et 37.

Le moment *par rapport à un axe* se définit comme projection du

Fig. 22.



moment μ sur l'axe Δ, ce moment étant pris par rapport à un point quelconque de l'axe. C'est donc le *vecteur* OP. Si nous désignons par $\overline{OQ}$ un vecteur *unité* suivant OΔ, la grandeur de ce moment est

$$T\mu.\cos\theta = \overline{OQ}\,|\,\mu = \overline{OQ}.\alpha\beta.$$

C'est-à-dire que c'est le spath construit sur AB et sur un bipoint

unité porté par Δ. Or ce volume est constant quel que soit le point O. On peut donc dire que le moment d'une force AB par rapport à un axe RQ est un *vecteur parallèle à cet axe* et dont le module est [RQAB], RQ étant un *bipoint unité* compté sur l'axe. Le moment a la direction RQ ou la direction QR suivant que le produit [RQAB] est *positif ou négatif*.

Nous sommes ainsi en possession de représentations très simples des grandeurs élémentaires de la Cinématique et de la Statique. Il en résulte immédiatement que tout théorème de Cinématique donnera lieu par dualité à un théorème correspondant de Statique, et inversement, en remplaçant l'un par l'autre les mots *rotation* et *force* d'une part et *translation* et *couple* de l'autre; les termes « rotation » et « translation » s'entendent d'ailleurs de rotations et translations instantanées. De plus, la *vitesse* de la translation correspond alors à la *grandeur du moment* du couple.

Soient par exemple deux bipoints AB, CD parallèles et de même sens ayant des modules égaux. On peut écrire, en supprimant les crochets,

$$\begin{aligned} AB = A(B - A) = A(D - C) &= (C + A - C)(D - C) \\ &= C(D - C) + (A - C)(D - C). \end{aligned}$$

L'interprétation de cette *identité* est la suivante :

Interprétation statique.

Une force quelconque AB peut se remplacer par une force égale et parallèle CD appliquée en un point arbitraire C, plus un couple dont le moment est égal à la surface du parallélogramme ABCD.

Interprétation cinématique.

Une rotation infiniment petite AB est la somme d'une rotation infiniment petite égale CD autour d'un axe parallèle au premier et mené par un point arbitraire C et d'une translation perpendiculaire à leur plan et dont la vitesse est l'aire ABCD.

49. Réduction de la F_2. Une F_2 pouvant être regardée comme une somme de bipoints est susceptible de représenter le système des forces appliquées à un solide et les différentes réductions que l'on peut obtenir pour une F_2 donneront alors les diverses réductions dont est susceptible un système de forces appliquées à un solide, tandis que la dualité donnera dans chaque cas un théorème de Cinématique correspondant.

Nous avons vu au n° **23** que l'on peut, d'une manière générale, ramener une somme quelconque de bipoints à la forme

$$S = AB + CD$$

de la somme de deux bipoints. On peut voir que dans toutes les réductions possibles *le produit* [SS] *est un invariant*. Soit en effet une deuxième réduction

$$S = A'B' - C'D'.$$

On a

$$[SS] = (AB - CD)(AB - CD) = (A'B' - C'D')(A'B' + C'D')$$

ou bien

$$[SS] = 2[ABCD] = 2[A'B'C'D'],$$

identité qui exprime que le volume du tétraèdre construit sur les deux *vecteurs conjugués* AB et CD est constant (Chasles), ou bien, d'après l'expression du moment (n° 48), que le *moment réciproque* (¹) des deux vecteurs conjugués, auxquels peut se réduire une F_2 d'une infinité de manières, est constant.

Ceci posé, la somme S peut prendre différentes formes suivant les relations des vecteurs AB, CD entre eux. On peut distinguer plusieurs cas.

I. *Les vecteurs conjugués se rencontrent.* — Dans ce cas, la F_2 se réduira à un bipoint unique qui est la somme des bipoints AB et CD. La condition pour qu'il en soit ainsi est que l'invariant [SS] soit nul. (*Cf.* n° 41, XII.)

II. Les deux vecteurs conjugués AB et CD forment *un couple*. Dans ce cas, la forme F_2 est équivalente à *un bivecteur*.

III. *Les bipoints* AB et CD *sont quelconques et ne se rencontrent pas*. On peut alors remplacer la somme de ces deux bipoints par un bipoint passant par A et un bivecteur, car d'après (n° 48) le bipoint CD peut se remplacer par un bipoint passant par un point arbitraire (ici le point A), lequel se compose alors avec AB en un bipoint unique AE, et par un bivecteur. Désignons par γ un vecteur perpendiculaire au plan du bivecteur et dont le module a pour valeur l'aire de ce bivecteur, on pourra écrire

$$S = [AE] - [\gamma]. \tag{1}$$

Le vecteur γ s'appelle *axe* du bivecteur. Chasles a fait voir que parmi toutes les décompositions possibles sous la forme (1) il en

(¹) Le *moment réciproque* de deux vecteurs AB et CD est donc égal au moment de CD par exemple par rapport à AB, *multiplié par le module* de AB.

existe toujours une et une seule dans laquelle le bipoint AE et l'axe γ sont parallèles.

Le bipoint obtenu dans cette décomposition particulière s'appelle alors *axe central* du système de vecteurs. Nous pouvons l'obtenir de la manière suivante. Supposons que nous décomposions l'un quelconque des bipoints qui composent la F_2 en un bipoint qui soit parallèle au premier et passe par un point arbitraire A et en un bivecteur (n° 48). L'opération totale donnera comme résultat des bipoints passant tous par le point A et se composant en un bipoint équipollent à la résultante ou somme géométrique des vecteurs équipollents aux bipoints composants, soit σ, et un bivecteur $|\gamma$. Nous pouvons donc écrire

$$S = [A\sigma] + |\gamma. \tag{2}$$

Si nous choisissons au lieu du point A un autre point A', la somme σ ne change pas, et en posant

$$A = A' - \delta,$$

nous aurons

$$S = [(A' + \delta)\sigma] + |\gamma = [A'\sigma] + [\delta\sigma] + |\gamma, \tag{3}$$

de sorte que le bivecteur est maintenant devenu $[\delta\sigma] + |\gamma$. Exprimons que l'axe de ce bivecteur est parallèle à σ, c'est-à-dire que le produit extérieur de ce bivecteur et du bivecteur $|\sigma$ est nul. Nous aurons l'équation

$$[[\delta\sigma] + |\gamma]|\sigma = 0$$

ou bien

$$[\delta\sigma|\sigma] + |\gamma\sigma = 0.$$

Développons le produit double par la formule trouvée au n° 41, XIV, nous aurons

$$\sigma[\delta|\sigma] - \delta[\sigma|\sigma] + |\gamma\sigma = 0.$$

Nous pouvons supposer que δ est perpendiculaire à σ sans restreindre la généralité; car cela revient à supposer que l'on prend le point A' de l'axe central dans un plan déterminé mené par A perpendiculairement à la direction fixe σ. On a alors $[\delta|\sigma] = 0$ et δ se trouve déterminé d'une manière univoque par l'équation

$$\delta = \frac{|\gamma\sigma}{[\sigma|\sigma]}. \tag{4}$$

Dans cette réduction particulière on peut donc écrire, puisque alors

le vecteur γ est devenu parallèle à σ.

$$(5) \qquad F_2 = E\sigma + k\,|\sigma\,(^1),$$

E étant un point quelconque de l'axe central et k un scalar qu'on appelle le *paramètre* de la réduction.

Si nous interprétons statiquement et cinématiquement les résultats qui précèdent, nous voyons d'abord qu'au point de vue statique un système de forces quelconques appliquées à un solide peut se réduire :

1° A une résultante unique dans le cas où l'invariant de la forme F_2 est nul ;

2° A une somme de deux forces qui ne se rencontrent pas et dont l'une est appliquée en un point arbitraire ;

3° A la somme de sa résultante géométrique appliquée en un point arbitraire et d'un couple ;

4° A la somme de la résultante géométrique appliquée en un point de l'axe central et suivant sa direction, et un couple dont l'axe est parallèle à la résultante géométrique.

On aurait pour les rotations des théorèmes dualistiques faciles à énoncer. On remarquera qu'en particulier le dernier exprime que tout déplacement infiniment petit d'un solide peut être obtenu au moyen d'un déplacement hélicoïdal.

Considérons la réduction

$$F_2 = [AB] + [CD] = [E\sigma] + k\,|\sigma,$$

$|AB|$ et $|CD|$ désignant un des systèmes en nombre infini de deux bipoints auxquels peut se réduire le système de forces F_2. Multiplions les deux membres de cette équation par un plan ϖ perpendiculaire à σ.

Nous aurons alors $|\sigma.\varpi = 0$, car $|\sigma$ est contenu dans ϖ (n° **36**). On a donc

$$[AB\varpi] + [CD\varpi] = [E\sigma.\varpi],$$

ce qui signifie que le point d'intersection de l'axe central et du plan ϖ, c'est-à-dire $|E\sigma.\varpi|$ et les points d'intersection de ce même plan avec les deux vecteurs $|AB|$ et $|CD|$ sont linéairement dépendants. Ces points sont donc en ligne droite. On voit que l'axe central coupe à angle droit la plus courte distance de deux vecteurs conjugués quelconques (théorème de *Schwein*).

---

(1) Une F_2 réduite à la forme (5) s'appelle quelquefois une *vis*.

50. Moment résultant. — Étant donné un système quelconque de forces

$$S = \Sigma[AB];$$

on appelle *moment résultant* de ce système, par rapport à un point O, la somme géométrique des moments des forces par rapport à ce point. Nous savons (n° 48) que le moment de la force [AB] par rapport au point O est donné par l'expression

$$\mu = [(A - O)(B - A)] = [\alpha\gamma].$$

Le moment résultant $\mathfrak{M}$ est donc le vecteur

$$\mathfrak{M} = \Sigma\mu = \Sigma[\alpha\gamma].$$

Transportons le centre des moments O en un autre point O′ tel qu'on ait $OO' = \delta$ et soit α' le nouveau vecteur du point A d'application de la force; on aura

$$\alpha = \delta + \alpha'.$$

D'autre part, γ ne changeant pas, le nouveau moment résultant sera

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}' &= \Sigma[\alpha'\gamma] = \Sigma[(\alpha - \delta)\gamma] \\ &= \Sigma[\alpha\gamma] - \Sigma[\delta\gamma] = \mathfrak{M} - [\delta\Sigma\gamma] = \mathfrak{M} - [\delta\sigma],\end{aligned}$$

en désignant encore par σ la résultante géométrique du système de forces. On voit donc que :

Si l'on change le centre des moments, le nouveau moment résultant est égal au premier, *augmenté* du moment, par rapport au *nouveau centre* des moments, de la somme géométrique (ou résultante) des forces transportée au premier, car ce dernier moment est

$$[(-\delta)\sigma] = -[\delta\sigma].$$

Ceci posé, remarquons que le moment de la force AB peut s'écrire

$$[(A - O)(B - A)] = [(A - O)(B - O)],$$

et qu'on a généralement

$$[AB] = [(A - O)(B - O) + O(B - A)] = [\mu - O\gamma].$$

On en déduit

$$S = \Sigma[\mu + O\sigma = [\mathfrak{M} + O\sigma;$$

d'où, en faisant le produit extérieur,

$$[SS] = [\mathfrak{M}.O\sigma + O\sigma.[\mathfrak{M},$$

car le produit extérieur d'une quantité par elle-même est nul (n° 35).

$O\sigma$ est la résultante des forces transportée au point O. Soit R cette résultante. Si nous avons $[SS] = 0$, la relation précédente exige

$$R \mid \mathfrak{M} = 0,$$

c'est-à-dire que R et $\mathfrak{M}$ sont perpendiculaires. On voit donc que :

Pour qu'un système de forces (ou de bipoints) se réduise à une force (où à un bipoint) unique, il faut et il suffit que le moment résultant soit perpendiculaire à la résultante de translation.

La direction de la résultante étant fixe, on voit que, dans ce cas, le moment résultant par rapport à un point quelconque de l'espace est perpendiculaire à une direction fixe, c'est-à-dire *parallèle à un plan invariable.*

Cas particulier d'une somme de bipoints. — Considérons deux bipoints parallèles de même sens et à distance finie AB et CD. Soient p et q deux vecteurs équipollents à ces bipoints. On peut écrire

$$AB = [Ap], \qquad CD = [Cq],$$

d'où

$$AB + CD = [Ap] + [Cq] = [Ap] + [C, \alpha p],$$

car on peut poser $q = \alpha p$

$$= [Ap] + [\alpha C, p] = [(A + \alpha C), p] = (1 + \alpha)[Sp],$$

S étant le point qui est la somme des points A et αC.

On voit donc que la somme de deux bipoints parallèles de même sens est un bipoint dont la longueur est la somme des deux premiers et qui est appliqué au barycentre des points d'application des deux termes, en les affectant de masses proportionnelles aux longueurs des bipoints primitifs.

On en déduit facilement qu'une somme de bipoints parallèles

$$x[AB] + y[CD]$$

représente un bipoint

$$(x + y)[EF],$$

à distance finie si $x + y \neq 0$, et un produit de vecteurs (ou bivecteur) si $x + y = 0$. Ce dernier résultat s'obtient en remarquant que, si $B - A = CD$, on a

$$[AB] + [CD] = [A(B - A)] + [(C - D)D] = A(B - A) + (B - A)D$$
$$= [(B - A)(D + A)] \quad (A_2, 274\text{–}276).$$

EXERCICES ET NOTES SUR LES CHAPITRES III ET IV.

PRODUITS DES POINTS ET DES FORMES.

51. 1. *Note.* — Il importe de se rappeler que le plan et l'espace peuvent être envisagés respectivement comme des domaines du deuxième et troisième degré; ou du troisième et quatrième degré suivant qu'on prend comme élément la droite (le vecteur) ou le point. Dans tous les cas on suppose toujours que le produit extérieur des unités est égal à l'unité absolue $+1$.

Ainsi, le plan comme champ de vecteurs est défini au moyen des unités ε_1, ε_2 par exemple et l'on pose

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 = -1.$$

Comme champ ponctuel, il est défini par trois points arbitraires, A, B, C, et l'on pose

$$ABC = +1.$$

De même l'espace comme champ de vecteurs est rapporté à trois unités ε_1, ε_2, ε_3, et l'on pose

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 = -1.$$

et si on le regarde comme champ ponctuel, il est rapporté à quatre points A, B, C, D, en posant

$$ABCD = +1.$$

Il est rappelé également que les équations

$$\begin{aligned} AB &= 0, \\ ABC &= 0, \\ ABCD &= 0 \end{aligned}$$

expriment respectivement que les deux points A et B sont confondus, que les trois points A, B, C sont collinéaires, que les quatre points A, B, C, D sont coplanaires.

De même les équations

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 \varepsilon_2 &= 0, \\ \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 &= 0 \end{aligned}$$

expriment respectivement que les deux droites ε_1, ε_2 sont parallèles

et que les trois droites ε_1, ε_2, ε_3 sont coplanaires (c'est-à-dire ici parallèles à un même plan).

La représentation ponctuelle de l'espace ou du plan est indépendante des axes de coordonnées et de l'origine, tandis que la représentation linéaire n'est pas autre chose au fond qu'une représentation cartésienne, les axes étant dirigés suivant les droites ε_1, ε_2, ε_3 qui sont supposées se rencontrer en un point fixe (origine). On a pris l'habitude, depuis HAMILTON, de représenter les trois vecteurs unités dirigés suivant ε_1, ε_2, ε_3 par les lettres i, j, k (n° 21) formant un trièdre trirectangulaire *à droite*. Toutefois, il est *essentiel de noter* que, tandis que nous posons *dans le calcul des formes* $ijk = +1$, nous poserons plus loin *dans le calcul vectoriel* ou des quaternions $ijk = -1$. C'est afin d'éviter les confusions que nous avons conservé dans le premier les symboles ε_1, ε_2, ε_3.

II. *Les milieux des diagonales d'un quadrilatère complet sont collinéaires* (*cf.* Chap. II, Exercice 13).

Soient A, B, C, D, E, F les sommets du quadrilatère complet, et P, Q, R les milieux des diagonales. On a

$$2P = A - C, \qquad 2Q = B - D, \qquad 2R = E - F.$$

On effectue le produit

$$8PQR = (A - C)(B - D)(E - F),$$

et l'on constate facilement qu'il est nul, en exprimant par exemple C, E, F en fonction des trois points A, B, D.

III. *Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes* [37].

On a souvent intérêt dans des questions de ce genre à introduire directement dans le calcul le point de rencontre supposé en le regardant comme point de rencontre de deux des droites qui le déterminent. Par exemple ici soient α, β, γ les vecteurs des sommets A, B, C, et δ le point de rencontre des hauteurs issues de A et de B. On a

$$(\delta - \alpha)(\beta - \gamma) = 0,$$
$$(\delta - \beta)(\gamma - \alpha) = 0.$$

D'où, par addition, on trouve aisément

$$(\delta - \gamma)(\beta - \alpha) = 0.$$

Par conséquent, $\delta - \gamma$ est bien la troisième hauteur.

IV. *Soient* ABCD *un quadrilatère*, MN *la droite qui joint les milieux des diagonales et* P *un point quelconque situé sur la droite* MN. *Démontrer que la somme des aires des triangles ayant pour sommet* P *et pour bases deux côtés opposés est la même pour chaque paire de côtés opposés.* (JAHNKE, *loc. cit.*) [27].

On a

$$2M = A + C, \qquad 2N = B + D.$$

On posera

$$P = \lambda M + \mu N, \qquad \lambda + \mu = 1.$$

On en déduit

$$2ABP = \lambda ABC + \mu ABD$$

et trois autres semblables. D'où, par addition des deux membres, le théorème énoncé.

V. *Déduire du théorème ci-dessus, le* THÉORÈME DE NEWTON : *Dans un quadrilatère circonscrit, la droite qui joint les milieux des diagonales passe par le centre du cercle.*

VI. *Lorsque dans un tétraèdre deux couples d'arêtes opposées sont rectangulaires, le troisième l'est aussi* [37].

Soient OABC le tétraèdre et α, β, γ les lignes OA, OB, OC. On a par hypothèse

$$\alpha|(\gamma - \beta) = 0, \qquad \beta|(\alpha - \gamma) = 0;$$

d'où l'on déduit

$$\gamma|(\beta - \alpha) = 0.$$

VII. *Établir la relation qui existe entre six points coplanaires* [42].

Soient quatre points A, B, C, D, on a (n° 42)

$$(ABC)D = (DBC)A - (DCA)B + (DAB)C,$$

d'où, en multipliant par EF,

$$(ABC)(DEF) - (DBC)(AEF) + (CDA)(BEF) - (DAB)(CEF) = 0,$$

relation entre les triangles qu'on peut former avec les six points. En exprimant ces triangles sous forme de déterminants, on a une relation due à *Cayley*.

VIII. *Établir la formule du double produit vectoriel* (*cf.* Note n° 41)

$$[\alpha\beta|\gamma] = |\alpha|\gamma|\beta - |\beta|\gamma|\alpha.$$

UNIVERSITAS SCIENTIAE OTTAWENSIS

On posera

$$\alpha = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3,$$
$$\beta = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3,$$
$$\gamma = c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3,$$

et il suffit d'effectuer le calcul indiqué en tenant compte des règles relatives au produit *régressif*, car $[\alpha\beta]\gamma]$ est du quatrième degré et par conséquent *régressif* dans le domaine linéaire.

IX. *Montrer que l'équation*

$$X\alpha\beta\gamma X = 0,$$

où X *est un point variable et* α, β, γ *des droites fixes,* α *et* γ *se rencontrant sans qu'aucune d'elles rencontre* β, *représente deux plans* (*cf.* n° 47).

X. *Montrer que l'équation*

$$X\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon X = 0,$$

où α *et* ε *se rencontrent, représente un cône du second ordre ayant son sommet au point de rencontre de* α *et* ε.

XI. *L'équation*

$$X\alpha\beta\alpha X = 0$$

est satisfaite par tout point de l'espace.

Pour ces trois exercices on raisonne successivement comme on l'a fait dans le Précis, en remarquant que $X\alpha$ est un faisceau de plans passant par α, $X\alpha\beta$ une ponctuelle β, etc. Par exemple, dans l'Exercice IX on voit que :

$X\alpha$ représente un faisceau de plans passant par α;

$X\alpha\beta$ représente la ponctuelle β déterminée sur β par ce faisceau.

Soit A le point $X\alpha\beta$.

$X\alpha\beta\gamma$ ou $A\gamma$ est un faisceau (un plan) passant par γ. Ce plan doit contenir X. Donc AX rencontre α et β, ce qui exige que X soit dans le plan $\alpha\beta$, etc.

XII. On sait qu'une F_2 générale peut se réduire à une somme de deux bipoints d'une infinité de manières, l'un de ces bipoints passant par un point arbitraire. On demande *le lieu du deuxième vecteur quand on suppose fixe le point arbitraire pour toutes les décompositions possibles.*

Supposons qu'on ait les décompositions

$$AB + CD = AB' + C'D' = AB'' + C''D'' = \ldots.$$

On aura, en multipliant par A,

$$ACD = AC'D' = AC''D'' = \ldots,$$

c'est-à-dire que si l'un des vecteurs conjugués tourne autour du point fixe A, l'autre reste dans un plan fixe (α) et la surface du triangle ayant son sommet en A et le deuxième vecteur pour base est constante.

XIII. Réciproquement, on peut choisir arbitrairement le plan dans lequel se trouve l'un des bipoints conjugués. Quel est alors *le lieu du deuxième bipoint?*

Soit (α) le plan donné. En multipliant par α on a

$$(AB.\alpha) + (CD.\alpha) = (A'B'.\alpha) + (C'D'.\alpha) = \ldots.$$

Les droites CD, C'D', ... sont dans le plan α. Donc

$$0 = CD.\alpha = C'D'.\alpha = \ldots,$$

et par suite

$$(AB.\alpha) = (A'B'.\alpha) = (A''B''.\alpha) = \ldots,$$

c'est-à-dire que toutes les droites AB... coupent le plan (α) au même point P, et leur projection sur la normale au plan est constante.

XIV. *Montrer que le moment du système par rapport à une droite quelconque issue du point* P *et située dans le plan* (α) *est nul* [50].

Soit C_1 le point où CD rencontre le plan (α). Joignons PC_1 et multiplions par PC_1 :

$$AB.PC_1 + CD.PC_1 = A'B'.PC_1 + C'D'.PC_1 = \ldots.$$

Les deux termes du premier membre sont nuls. On aurait le même résultat en prolongeant C'D' jusqu'à C'_1 et multipliant par PC'_1.... Le moment est donc nul par rapport à une droite quelconque issue de P. Le point P s'appelle *point nul* du système et (α) le *plan nul* correspondant. Les droites issues de A s'appellent *droites nulles* (*Möbius*).

XV. *Étant donné un plan, construire le point nul conjugué.*

Soit ϖ le plan donné, multiplions par ϖ. On a

$$AB.\varpi + CD.\varpi = A'B'.\varpi + C'D'.\varpi = \ldots;$$

$AB.\varpi$ est le point de rencontre de AB et de ϖ, soit A_1; $CD.\varpi$ est le point de rencontre de ϖ et de CD, soit C_1. Si nous coupons toutes les croisées par un plan quelconque, nous voyons que les droites joignant les points d'intersection des vecteurs conjugués et du plan ϖ passent en un même point. Ce point est le *point nul* relatif au plan ϖ. En effet le moment, par rapport à une droite telle que A_1C_1 qui y passe, est nul puisqu'elle rencontre AB et CD.

XVI. *Étant donné un point, construire le plan nul.*

Soit P le point. On aura

$$ABP + CDP = A'B'P + C'D'P = \ldots.$$

Le plan déterminé par la somme des plans ABP — CDP est le même pour toutes les croisées. Par suite, si l'on mène deux plans par deux vecteurs conjugués et par un point arbitraire P, tous ces couples de plans se coupent suivant des droites qui sont dans un même plan passant par P. C'est le *plan nul* correspondant au point P, car ces droites rencontrent à la fois AB et CD et sont donc *des droites nulles*.

XVII. *Soient* AB *une droite et* XY *un axe quelconque. Si l'on désigne respectivement par* h_1, h_2 *et* S *les distances des points* A *et* B *et du milieu de* AB *à l'axe* XY, *le moment d'inertie de* AB *par rapport à l'axe* XY *est donné par l'expression*

$$T = \frac{m}{6}(h_1^2 + h_2^2 + \tfrac{1}{4}S^2),$$

m étant la masse de la droite AB *supposée homogène* (Jahnke, *loc. cit.*, p. 108).

Soit PQ un vecteur unité suivant XY, on remarque que si Z est un point quelconque de AB, le produit intérieur ZPQ | ZPQ est le carré de la distance du point Z à XY, car c'est le carré de l'aire ZPQ dont la base PQ est $= 1$. D'autre part, $Z = xA + yB$ avec $x + y = 1$ et l'on en déduit aisément $dm = m\,dx$. On a alors

$$T = m\int x^2(APQ \cdot APQ) + y^2(BPQ \cdot BPQ) + 2xy(APQ \cdot BPQ),$$

et il suffit de transformer le dernier terme en remarquant que si S est

le milieu de AB, on a $2S = A + B$. D'où $2SPQ = APQ + BPQ$, pour obtenir l'expression cherchée.

On remarquera pour cela qu'on a

$$APQ \mid BPQ = h_1 h_2 \cos\varphi,$$

φ étant l'angle des plans APQ et BPQ et que, en élevant au carré l'expression précédente, on obtient

$$4S^2 = h_1^2 + h_2^2 + 2h_1 h_2 \cos\varphi.$$

XVIII. *Soient* ABC *un triangle homogène de masse* m, *et* h_1, h_2, h_3 *les distances de* A, B, C, *à un axe* XY, S *la distance de son centre de gravité à ce même axe, on a*

$$T = \frac{m}{12}(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 + 9S^2).$$

On aura encore

$$T = \int (ZPQ \mid ZPQ)\,dm,$$

et en posant

$$Z = xA + yB + zC, \qquad x + y + z = 1.$$

On prendra comme élément d'aire un petit parallélogramme obtenu par des parallèles à AB et AC.

On trouvera facilement

$$dm = 2m\,dy\,dz,$$

et l'on devra intégrer dans le champ $x + y + z = 1$. On trouve l'expression

$$T = \frac{m}{6}(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 + h_2 h_3 \cos\varphi_1 + h_3 h_1 \cos\varphi_2 + h_1 h_2 \cos\varphi_3).$$

φ_1, φ_2, φ_3 étant les angles des plans BPQ avec CPQ, cycl. On transforme au moyen de

$$3S = A + B + C.$$

XIX. *Le moment d'inertie du tétraèdre homogène de masse* m *par rapport à l'axe* XY *est donné par*

$$T = \frac{m}{10}(h_1^2 + \ldots + h_4^2 + h_2 h_3 \cos\varphi_{2,3} + \ldots + h_1 h_4 \cos\varphi_{1,4})$$
$$= \frac{m}{20}(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 + h_4^2 + 16S^2).$$

Les h, φ et S ayant des significations analogues à celles de ces lettres dans les cas précédents.

XX. *Quelle est la condition pour qu'il existe une relation linéaire, entre quatre droites de l'espace?*

Soient quatre droites σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 et la relation linéaire

$$a\sigma_1 + b\sigma_2 - c\sigma_3 + d\sigma_4 = 0.$$

Multiplions par une droite quelconque σ, on aura

$$a(\sigma_1\sigma) - b(\sigma_2\sigma) - c(\sigma_3\sigma) + d(\sigma_4\sigma) = 0.$$

Si la droite σ rencontre les trois droites σ_1, σ_2, σ_3, on a

$$\sigma_1\sigma = \sigma_2\sigma = \sigma_3\sigma = 0.$$

On doit donc avoir aussi $\sigma_4\sigma = 0$, c'est-à-dire que toute droite qui rencontre trois des quatre droites rencontre la quatrième. Ces droites appartiennent donc *à un même hyperboloïde réglé.*

XXI. *Le produit extérieur de deux vis* (*moment réciproque des deux vis* ou coefficient virtuel de Ball) *est égal à*

$$(E\sigma)(E'\sigma') - (k + k')(\sigma|\sigma').$$

Soient les deux vis

$$E\sigma + k|\sigma, \quad E'\sigma' + k'|\sigma'',$$

où l'on peut supposer E — E′ perpendiculaire à σ et σ'. Soient d la plus courte distance de σ et σ', φ leur angle, S et S′ les modules de σ et σ'. En effectuant le produit, on trouve par exemple : en remarquant que $\angle$ de $|\sigma'$ et de $\sigma = \frac{\pi}{2} - \varphi$ (faire la figure)

$$k'(E\sigma|\sigma') = \frac{1}{6}k'SS'\cos\varphi \qquad \text{et} \qquad k(|\sigma E'\sigma') = \frac{1}{6}kSS'\cos\varphi.$$

D'où l'on déduit l'expression indiquée.

XXII. *Remarque sur la multiplication.* Nous avons dit (n° 27) que le produit extérieur de plus de quatre points ou de plus de trois vecteurs est nul. Mais il ne faut pas oublier que cette remarque ne s'applique qu'au produit *extérieur*, résultant de la multiplication *alternée*. Il n'en est plus ainsi quand on emploie la multiplication générale définie à l'article 6. Nous trouverons dans les Chapitres suivants des produits de plus de trois vecteurs qui ne seront pas nuls, car la multiplication que nous allons employer pour eux n'est plus la multiplication alternée. De même (n° 29) un produit régressif de plus de trois vecteurs *n'est pas associatif*. Mais il continue à l'être dans la multiplication générale (n° 6).

31 *bis*. **Sur les produits planimétriques.** — Considérons le *domaine du plan* où nous prenons comme unité les trois points A, B, C, on pose par conséquent (n° 28)

$$[ABC] = 1.$$

D'après la définition générale du complément (*cf.* n° 28), le complément du bipoint AB serait le point C et l'on a

$$|AB = C.$$

Mais cette définition ne permet pas d'exprimer la perpendicularité de deux lignes.

Remarquons que si AB et CB sont deux bipoints unitaires rectangulaires, et le parallélogramme ABC etant positif, on a

$$[ABC] = [AB(C - B)] = 1.$$

Posons

$$C - B = \varepsilon.$$

ε est donc un *vecteur unité* perpendiculaire à AB et tel que le parallélogramme ABε soit positif. On a alors

$$[AB\varepsilon] = 1.$$

On pose

$$\varepsilon = |AB$$

et l'on a alors

$$[AB|AB] = 1.$$

Si AB n'est pas unitaire, soit a sa teneur. On a

$$|AB = a\varepsilon;$$

d'où

$$[AB|AB] = a^2\varepsilon^2 = a^2.$$

Dans le domaine planimétrique, le complément d'un bipoint est un vecteur normal à ce bipoint, ayant même teneur, et tel que le parallélogramme construit sur le bipoint et le vecteur soit positif.

On peut alors obtenir des relations métriques entre les droites du plan.

Soient, par exemple, deux droites X et Y du plan. Nous allons montrer que l'équation

$$[X|Y] = 0$$

exprime que ces droites sont rectangulaires.

En effet, soient

$$X = AB \qquad |Y = \varepsilon.$$

l'équation précédente s'écrit

$$[AB.\varepsilon] = 0.$$

Mais le produit du bipoint AB et du vecteur ε est égal à

$$T(AB).T\varepsilon \sin(AB, \varepsilon).$$

Il ne peut être nul que si l'angle de AB et de ε est 0 ou π. Or ε est perpendiculaire à Y. Donc Y est normal à X.

Soit, par exemple, ABC un triangle et soit ε un vecteur unité dirigé suivant BC. Posons

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1.$$

ε_2 est donc un vecteur unité normal à BC.

Soient ε_3 et ε_4 les vecteurs unités normaux à CA et AB, on a

$$BC = a\varepsilon_2, \qquad CA = b\varepsilon_3, \qquad AB = c\varepsilon_4.$$

On trouvera facilement par des considérations géométriques [le même calcul serait immédiat en se servant des propriétés du verseur hamiltonien (*cf.* n° 56)]

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_2 \cos\gamma - \varepsilon_1 \sin\gamma,$$
$$\varepsilon_4 = \varepsilon_1 \sin\beta - \varepsilon_2 \cos\beta,$$

ce qui donne les expressions des compléments de CA et AB au moyen des vecteurs ε_1 et ε_2.

Le lecteur pourra traiter de cette manière l'exercice suivant :

Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.

Les hauteurs sont congruentes aux produits $A\varepsilon_2$, $B\varepsilon_3$, $C\varepsilon_4$.

On remplacera ε_3 et ε_4 par leurs valeurs et l'on montrera que le produit de ces trois bipoints est nul.

Nous devons cependant ajouter que les calculs où entrent ainsi des perpendiculaires à des droites données seront en général beaucoup plus simples en employant la méthode vectorielle des *quaternions*.

CHAPITRE V.

PRODUIT DE DEUX VECTEURS. QUATERNION.

I. — Définitions générales.

52. **Définitions.** — Nous prenons avec Hamilton comme unités du système complexe le nombre 1, c'est-à-dire l'unité absolue, et trois unités vecteurs trirectangulaires formant un système à droite (*voir* Note du n° 21). Nous pouvons alors exprimer un vecteur quelconque sous la forme (n° 21)

$$\alpha = xi + yj + zk.$$

Soit

$$\beta = x'i + y'j + z'k$$

un deuxième vecteur. Si nous effectuons la multiplication *alternée* de ces deux vecteurs, les termes en ii, jj, kk disparaissent. *La multiplication quaternionienne n'est pas une multiplication alternée*, mais une multiplication complète telle que celle qui est définie à l'article 6 avec certaines conditions spéciales établies de manière à satisfaire au principe indiqué dans l'article 7. Si nous indiquons d'une manière générale une multiplication telle que celle de l'article 6 au moyen du signe . (un point), nous aurons ici

$$\begin{aligned}\alpha.\beta = {} & xx'i.i + yy'j.j + zz'k.k \\ & + xy'i.j + yx'j.i + yz'j.k + zy'k.j + zx'k.i + xz'i.k.\end{aligned}$$

D'après (n° 7), ceci doit se réduire à un nombre de la forme

$$w + ai + bj + ck,$$

où w, a, b, c sont des scalars.

En désignant par i^2 le symbole $i.i$, Hamilton, guidé par des idées théoriques exposées magistralement dans la Préface des *Lectures* et dont nous donnerons une idée dans une Note annexée à ce Chapitre, a posé

[A] $$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1,$$

équation qui contient en principe toute la théorie des quaternions.

La multiplication des unités étant associative (*voir* Note n° 51, XXII), on a, en multipliant l'équation $i.j.k = -1$ par k et supprimant momentanément le point,

$$ijk^2 = -k$$

ou par [A]

$$ij = k.$$

De même en multipliant par i :

$$i^2jk = -i \qquad \text{ou} \qquad jk = i.$$

Multipliant la première de ces deux équations par j, on obtient

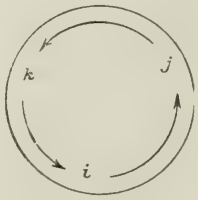
$$j = kj \qquad \text{ou} \qquad i = -kj.$$

Des procédés analogues donnent finalement les équations fondamentales dérivées de l'équation [A] :

$$[\mathrm{B}] \qquad \begin{cases} ij = -ji = k, \\ jk = -kj = i, \\ ki = -ik = j. \end{cases}$$

Ces règles se traduisent très simplement à l'aide du diagramme de la figure 23 donné par Hamilton (*L*, 530) (le sens de la flèche est

Fig. 23.



différent). Le produit de deux unités prises dans l'ordre de la flèche est égal à la troisième et il est égal à la troisième précédée du signe — si les facteurs sont pris dans l'ordre opposé à la flèche. C'est un excellent moyen de les retrouver à tout instant.

En appliquant au produit $\alpha.\beta$ les équations [A] et [B], on a

$$[\mathrm{P}] \qquad \begin{aligned} \alpha.\beta = &-(xx' + yy' + zz') \\ &+ i(yz' - zy') + j(zx' - xz') + k(xy' - yx'), \end{aligned}$$

équation qui va nous servir de point de départ. Nous remarquons

que le produit se compose de deux parties dépendant de *quatre* coefficients scalars :

1° Une partie *scalaire* $-(xx' + yy' + zz')$;
2° Une partie *vectorielle* $i(yz' - zy') + \ldots$.

Une expression telle que (P) s'appelle un QUATERNION. Désignons-le par q.

La partie scalaire s'appelle *scalar* du quaternion et la partie vectorielle le *vecteur* du quaternion. Hamilton emploie pour désigner le scalar la caractéristique S, et pour désigner le vecteur la caractéristique V. Nous conserverons ces notations d'une manière générale, mais nous lui en substituerons d'autres dans certains cas particuliers, en vue de faciliter certains calculs spéciaux. (*Voir* Chap. IX. — Fonction linéaire.)

On a donc généralement

$$\text{(Q)} \qquad q = \mathrm{S}q + \mathrm{V}q.$$

53. Scalar du produit. — Soient a et b les modules des vecteurs α et β, et λ, μ, ν; λ', μ', ν', les angles que forment les directions α, β avec les axes i, j, k, nous avons

$$x = a\cos\lambda, \qquad y = a\cos\mu, \qquad z = a\cos\nu,$$
$$x' = b\cos\lambda', \qquad y' = b\cos\mu', \qquad z' = b\cos\nu';$$

d'où

$$\mathrm{S}q = -ab(\cos\lambda\cos\lambda' + \cos\mu\cos\mu' + \cos\nu\cos\nu').$$

Désignons par θ l'angle compris entre o et π que forment entre elles les directions α et β. On voit que l'on a

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{S}q = -ab\cos\theta.$$

On voit que : *le scalar d'un produit est égal au produit des modules des deux facteurs multiplié par le cosinus de leur angle et* CHANGÉ DE SIGNE.

Sq est par conséquent égal à $-[\alpha|\beta]$ ou au produit intérieur de Grassmann *changé de signe*.

On voit que si α, par exemple, est unitaire, on a

$$\text{(2)} \qquad \mathrm{S}\alpha_0\beta = -b\cos\theta.$$

Le scalar d'un produit de deux vecteurs dont l'un est unitaire est égal à la projection de l'autre sur celui-ci, changée de signe.

Nous désignerons ordinairement le scalar d'un produit sans mettre

aucun signe entre les facteurs, comme dans la multiplication algébrique; de sorte que nous écrirons

$$(3) \qquad \alpha\beta = -ab\cos\theta = S\alpha\beta.$$

Remarque. — L'équation

$$(4) \qquad S\alpha\beta = 0 \quad \text{ou} \quad \alpha\beta = 0 \ [53,(3)]$$

exprime que les vecteurs α et β sont rectangulaires ($\cos\theta = 0$).

54. Vecteur du produit. — On a

$$(1) \qquad V\alpha\beta = i(yz' - zy') + j(zx' - xz') + k(xy' - yx')$$

qu'on peut écrire sous forme plus facile à retrouver

$$(2) \qquad V\alpha\beta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}$$

et traitant i, j, k comme des lettres.

Un calcul identique à celui du n° 39, en tenant compte de (A) et (B), montre que l'on a

$$(3) \qquad TV\alpha\beta = ab\sin\theta,$$

a, b, θ ayant la même signification que ci-dessus (n° 53) et que l'on peut écrire

$$(4) \qquad V\alpha\beta = ab\sin\theta.\varepsilon,$$

ε étant un *vecteur unité perpendiculaire au plan* de α et β et dirigé dans un sens tel que la *rotation* de α vers β *par rapport* à ε *soit positive*.

Remarques. — I. Dans le cas de *deux* facteurs seulement, nous remplacerons généralement la notation $V\alpha\beta$ par la notation $\alpha \times \beta$ ou

$$(5) \qquad \alpha \times \beta = ab\sin\theta.\varepsilon.$$

II. L'équation

$$\alpha \times \beta = 0$$

exprime que les deux vecteurs α et β sont parallèles ($\theta = 0$ ou π).

III. Pour éviter des parenthèses, nous écrivons S^2q, V^2q, T^2q au lieu de $(Sq)^2$, $(Vq)^2$, $(Tq)^2$. Il ne peut y avoir de confusion parce

que SSq, par exemple, étant égal à Sq, S^2q ne peut signifier SSq, qui serait une notation inutile. Il en est de même pour V^2q qui ne peut signifier VVq, car $VVq = Vq$.

Pour les fonctions algébriques ou transcendantes et pour les différentielles, nous conserverons l'usage admis. Ainsi, $\cos^2 x$ signifiera $(\cos x)^2$ et non pas $\cos(\cos x)$ et d^2x signifiera $d(dx)$ et non $(dx)^2$ [1].

55. Réciproque d'un vecteur. Quotient de deux vecteurs. — Hamilton appelle *réciproque* d'un vecteur α un vecteur β tel que le produit $\alpha.\beta = 1$.

Soient a le module de α et b celui de β, on aura

$$ab\alpha_0.\beta_0 = 1.$$

Le second membre étant un scalar, on a

$$V\alpha_0\beta_0 = 0$$

et par suite (n° 54) α_0 et β_0 sont parallèles. Mais comme α_0 et β_0 sont unitaires, leur produit est -1 ou $+1$ suivant qu'ils sont dirigés ou non dans le même sens. Or ab étant positif, on voit que $\alpha_0.\beta_0$ doit être positif, et par suite

$$\alpha_0 = \beta_0$$

et alors

$$b = \frac{1}{a} \qquad \text{et} \qquad a = \frac{1}{b}.$$

Ces conditions étant symétriques, il en résulte que si β est le réciproque de α, réciproquement α est le réciproque de β.

On désigne le réciproque d'un vecteur par la notation α^{-1}. On a donc

$$(1) \qquad \alpha^{-1} = -\frac{1}{a}\alpha = -\frac{\alpha_0}{a^2}.$$

Ceci permet de définir le *quotient de deux vecteurs*. On pose par définition (Hamilton)

$$(2) \qquad \frac{\beta}{\alpha} = \beta\alpha^{-1} \qquad (\text{et non } \alpha^{-1}\beta).$$

---

[1] Nous supprimerons ordinairement aussi le point indiquant la multiplication quaternionienne lorsqu'il ne pourra y avoir aucune ambiguïté.

on en déduit facilement

$$(3)\qquad \begin{cases} S\dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{b}{a}\cos\theta, \\ V\dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{b}{a}\sin\theta.\varepsilon. \end{cases}$$

θ et ε ayant la même définition que plus haut (n°s 53 et 54).

Il importe de remarquer la relation suivante, souvent utile. Soient deux quotients sous la forme $\dfrac{\gamma}{\beta}$ et $\dfrac{\beta}{\alpha}$, on a

$$\frac{\gamma}{\beta} = \gamma\beta^{-1} \qquad \text{et} \qquad \frac{\beta}{\alpha} = \beta\alpha^{-1},$$

d'où

$$(4)\qquad \frac{\gamma}{\beta}\cdot\frac{\beta}{\alpha} = \gamma\beta^{-1}\beta\alpha^{-1} = \gamma(\beta^{-1}\beta)\alpha^{-1} = \frac{\gamma}{\alpha}.$$

Dans un produit tel que (4), on peut supprimer *les moyens* s'ils sont égaux $\left(\text{mais on n'aurait pas en général } \dfrac{\gamma}{\beta}\cdot\dfrac{\alpha}{\gamma} = \dfrac{\alpha}{\beta}\right)$. Ceci suppose que la *propriété associative* de la multiplication, vraie pour les unités i, j, k, l'est aussi pour des facteurs quelconques. Nous le démontrons un peu plus loin.

56. Quaternion considéré comme produit. Verseur. — Nous avons obtenu le quaternion comme somme de son scalar et de son vecteur. On peut aussi le considérer comme un produit, dans un ordre d'idées différent, ce qui va nous fournir des résultats nouveaux.

Si nous posons

$$(1)\qquad \frac{\beta}{\alpha} = q,$$

nous en tirons

$$\text{soit } \beta = q\alpha, \qquad \text{soit } \beta = \alpha q,$$

en considérant le quotient q comme un facteur qui, au moyen de α, doit nous donner β par analogie avec la multiplication et la division algébriques. Hamilton a choisi la première alternative et pose donc

$$(1')\qquad \beta = q\alpha:$$

q est donc un facteur qui, en opérant sur α, produit β. Or cette opération peut se faire en deux stages dont l'ordre est d'ailleurs indifférent.

1° Nous rendrons la longueur de α égale à celle de β, au moyen d'un opérateur évidemment numérique. Il suffit pour cela de multi-

plier le module de α par le rapport des modules de β et de α. Cet opérateur numérique était appelé par Hamilton le *tenseur* et indiqué par la caractéristique T. Nous l'appellerons *module* ou *teneur* et l'indiquerons par la même caractéristique initiale du mot *teneur*. On aura ainsi

$$\mathrm{T}q = \frac{\mathrm{T}\beta}{\mathrm{T}\alpha} = \frac{b}{a}. \tag{2}$$

2° Il nous restera maintenant à faire tourner le vecteur α dans le plan de α et β de manière à l'amener dans la direction de β, ce que nous pouvons toujours obtenir au moyen d'une rotation comprise entre o et π. Cette rotation sera obtenue au moyen d'un opérateur qu'Hamilton appelle *verseur* et auquel il donne la caractéristique U. On a ainsi

$$q = \mathrm{T}q\,\mathrm{U}q \tag{3}$$

ou bien, puisque l'ordre des opérations est évidemment indifférent,

$$q = \mathrm{U}q\,\mathrm{T}q. \tag{3}$$

Or nous avons trouvé [n° 55, (3)]

$$q = \mathrm{S}q + \mathrm{V}q = \frac{b}{a}(\cos\theta + \varepsilon\sin\theta),$$

et nous avons d'ailleurs

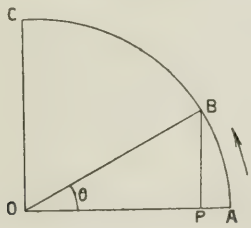
$$\mathrm{T}q = \frac{b}{a};$$

nous devons donc avoir

$$\mathrm{U}q = \cos\theta + \varepsilon\sin\theta. \tag{4}$$

Il est facile, en effet, de vérifier qu'il en est bien ainsi. Considérons, en effet (*fig.* 24), les deux vecteurs unitaires $\mathrm{OA} = \alpha_0$ et $\mathrm{OB} = \beta_0$

Fig. 24.



et soit θ l'angle de leurs directions (compris entre o et π). On sait que ε est alors un vecteur unité perpendiculaire au plan AOB et tel

que la rotation de OA vers OB soit positive. Dans le cas de la figure, ε serait donc dirigé au-dessus de la feuille. Or nous avons

$$\beta_0 = OB = OP + PB = \cos\theta . \alpha_0 + \sin\theta . \varepsilon\alpha_0,$$

comme on le voit en faisant le produit $\varepsilon\alpha_0$, qui donne OC.

D'où

$$\beta_0 = (\cos\theta + \varepsilon \sin\theta)\alpha_0,$$

et par suite

$$\beta = Tq(\cos\theta + \varepsilon \sin\theta)\alpha.$$

On voit donc que l'opérateur

$$Uq = \cos\theta + \varepsilon \sin\theta,$$

agissant sur un vecteur *perpendiculaire* à ε, fait tourner ce vecteur dans le sens direct de l'angle θ. D'où le nom de *verseur* donné à cet opérateur.

Tq s'appelle le *module* du quaternion et θ *son angle*.

Le vecteur unité ε s'appelle l'*axe* du quaternion.

Le plan AOB des deux vecteurs α et β s'appelle *plan* du quaternion.

Il est clair que l'opérateur

$$\cos\theta + \varepsilon \sin\theta$$

opère dans les mêmes conditions une rotation de l'angle $-\theta$ sur le vecteur α, c'est-à-dire une rotation θ dans le sens négatif par rapport à ε.

Un verseur s'appelle aussi quelquefois *quaternion unitaire* parce que son module est égal à l'unité. Si $\theta = \frac{\pi}{2}$, le verseur se réduit à ε. Un vecteur unité est donc un quaternion unitaire dont l'axe est ce vecteur lui-même et dont l'angle est $\frac{\pi}{2}$.

57. Notation exponentielle. Rotation conique. Si nous opérons une deuxième fois sur le vecteur OB par le verseur

$$Uq = \cos\theta + \varepsilon \sin\theta,$$

il est clair que le résultat obtenu sera un vecteur OB′ représentant OA après une rotation de l'angle 2θ autour de ε. Mais cette rotation peut s'obtenir directement au moyen du verseur

$$\cos 2\theta + \varepsilon \sin 2\theta,$$

on a donc

$$\cos 2\theta + \varepsilon \sin 2\theta = (\cos\theta - \varepsilon \sin\theta)(\cos\theta + \varepsilon \sin\theta) = (\cos\theta - \varepsilon \sin\theta)^2$$

et généralement, si m est un *entier positif*,

$$(1) \qquad \cos m\theta + \varepsilon \sin m\theta = (\cos\theta + \varepsilon \sin\theta)^m.$$

Cette formule est évidemment exacte pour m entier et négatif, les rotations ayant alors lieu en sens inverse. Si nous posons alors comme en algèbre

$$(\cos\theta + \varepsilon \sin\theta)^{\frac{p}{q}} = [(\cos\theta + \varepsilon \sin\theta)^p]^{\frac{1}{q}},$$

on étendra cette équation à une valeur quelconque réelle de m au moyen des raisonnements connus. C'est une généralisation de la *formule de Moivre*.

Supposons que nous opérions successivement sur un vecteur α par deux verseurs ayant *même axe*, mais des angles différents, θ et φ. Le résultat de l'opération sera

$$(\cos\varphi + \varepsilon \sin\varphi)(\cos\theta + \varepsilon \sin\theta)\alpha,$$

c'est-à-dire

$$[\cos(\varphi + \theta) + \varepsilon \sin(\varphi + \theta)]\alpha,$$

d'après la définition du verseur et ainsi d'ailleurs que le montrerait le calcul direct. Si donc nous posons

$$\cos\theta + \varepsilon \sin\theta = f(\theta),$$

nous voyons que la fonction f jouit de la *propriété caractéristique de la fonction exponentielle*

$$f(\varphi + \theta) = f(\varphi) f(\theta).$$

L'ordre des opérations est *indifférent*. (Il ne le serait pas si les axes des verseurs étaient différents.) Ceci a suggéré à Hamilton l'idée de poser

$$(2) \qquad \cos\theta + \varepsilon \sin\theta = \varepsilon^\theta,$$

expression où l'*angle droit doit être pris comme unité* de manière que, pour $\theta = 1$, le premier membre se réduise bien à ε. On a alors

$$(3) \qquad \cos\theta - \varepsilon \sin\theta = \varepsilon^{-\theta}.$$

Si θ s'exprime *en parties du rayon* (mesure trigonométrique ordi-

naire), sa mesure en angles droits sera donnée par

$$\theta = m\frac{\pi}{2} \qquad \text{ou} \qquad m = \frac{2\theta}{\pi},$$

on peut alors écrire

$$(4) \qquad \varepsilon^m = \cos m\frac{\pi}{2} + \varepsilon \sin m\frac{\pi}{2}.$$

L'opérateur ε^m fait donc tourner le vecteur α *perpendiculaire à* ε de l'angle $m\frac{\pi}{2}$ dans le sens direct. On a évidemment

$$\varepsilon^{-m} = \cos m\frac{\pi}{2} - \varepsilon \sin m\frac{\pi}{2},$$

et par suite

$$(5) \qquad \varepsilon^m \alpha = \alpha \varepsilon^{-m};$$

on en déduit

$$\varepsilon^m \alpha \varepsilon^{-m} = \varepsilon^{2m} \alpha,$$

c'est-à-dire que l'opérateur

$$(6) \qquad \varepsilon^m (\quad) \varepsilon^{-m}$$

fait tourner un vecteur α *perpendiculaire à son axe*, de l'angle $2m\frac{\pi}{2}$ dans le sens positif.

Cet opérateur appliqué à un vecteur *parallèle à l'axe* ε donne

$$\varepsilon^m (\varepsilon) \varepsilon^{-m} = \varepsilon^m \cdot 1 \varepsilon^{-m} = \varepsilon,$$

c'est-à-dire qu'*il ne le modifie pas*.

Or un vecteur quelconque pouvant se décomposer en deux composantes, l'une parallèle à l'axe et l'autre perpendiculaire à l'axe, on voit que l'opérateur (6), appliqué à un *vecteur quelconque*, fait tourner sa composante perpendiculaire à ε de l'angle $2m\frac{\pi}{2}$ ou $2m$ droits dans le sens direct, sans modifier la composante parallèle à l'axe. Le résultat de l'opération est donc une ROTATION CONIQUE de $2m$ droits autour de l'axe, d'où la proposition très importante qui suit :

L'opérateur $\varepsilon^m (\,.\,) \varepsilon^{-m}$ *fait tourner un vecteur quelconque de* $2m$ *angles droits* (dans le sens direct si $m > 0$, en sens rétrograde si $m < 0$) *coniquement autour de l'axe* ε.

On peut prévoir l'importance considérable que prend en Cinématique un tel opérateur dont la forme permet de résoudre, pour ainsi

dire automatiquement, un grand nombre de questions relatives aux rotations, étant donné qu'il n'y entre que les éléments mêmes du problème, c'est-à-dire l'axe de la rotation et sa grandeur. Nous en donnons plus loin quelques exemples. (*Voir* n° 76 et suivants.)

58. Quaternion conjugué. — Soit le quaternion

$$q = \mathrm{S}q + \mathrm{V}q.$$

Hamilton appelle *quaternion conjugué* de q, le quaternion qui a même scalar et vecteur de signe contraire. Il le désigne par la notation $\mathrm{K}q$

$$\mathrm{K}q = \mathrm{S}q - \mathrm{V}q. \tag{1}$$

On a la relation

$$q\,\mathrm{K}q = \mathrm{K}q\,q = \mathrm{T}^2 q, \tag{2}$$

car soit

$$q = \mathrm{T}q(\cos\theta + \varepsilon\sin\theta),$$

on aura

$$\mathrm{K}q = \mathrm{T}q(\cos\theta - \varepsilon\sin\theta),$$

d'où, par multiplication, la relation (2).

On voit que

$$\mathrm{KU}q = \mathrm{UK}q. \tag{3}$$

Les produits $\alpha.\beta$ et $\beta.\alpha$ sont conjugués, car dans le deuxième produit le sens de l'angle θ (ou plutôt du vecteur ε) change :

$$\mathrm{K}(\alpha.\beta) = \beta.\alpha. \tag{4}$$

On tire de (1)

$$\mathrm{KK}q = q \qquad \text{ou symboliquement} \qquad \mathrm{K}^2 = 1. \tag{5}$$

L'équation (2) peut aussi s'écrire

$$\mathrm{S}^2 q - \mathrm{V}^2 q = \mathrm{T}^2 q \tag{6}$$

ou, symboliquement,

$$(\mathrm{S} + \mathrm{V})(\mathrm{S} - \mathrm{V}) = \mathrm{T}^2. \tag{7}$$

Par (4) on obtient

$$\mathrm{S}^2\alpha\beta - \mathrm{V}^2\alpha\beta = \alpha^2\beta^2. \tag{8}$$

formule souvent employée.

Le conjugué d'un *scalar* est ce *scalar lui-même*.

Le conjugué d'un *vecteur* est ce *vecteur changé de signe* ou, symboliquement,

$$\text{(9)} \qquad KS = S, \qquad KV = -V.$$

59. Quaternions réciproques. — Le réciproque d'un quaternion q est le quaternion q' qui satisfait à la relation

$$qq' = q'q = 1.$$

On le désigne par la notation q^{-1}. On verrait comme pour les vecteurs réciproques que l'on a

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} Tq^{-1} = \dfrac{1}{Tq}, \\ Uq^{-1} = (Uq)^{-1}. \end{cases}$$

Si l'on a

$$q = Tq(\cos\theta + \varepsilon\sin\theta),$$

on aura

$$q^{-1} = \frac{1}{Tq}(\cos\theta - \varepsilon\sin\theta).$$

On en déduit

$$\text{(2)} \qquad Kq^{-1} = \frac{q}{T^2 q}.$$

On a aussi

$$\text{(3)} \qquad (Kq)^{-1} = \frac{q}{T^2 q} = Kq^{-1}.$$

Le conjugué du réciproque est égal au réciproque du conjugué.

On remarquera également les formules :

$$\text{(4)} \qquad \begin{cases} Sq = \dfrac{1}{2}(q + Kq), \\ Vq = \dfrac{1}{2}(q - Kq). \end{cases}$$

En particulier, on a

$$\text{(5)} \qquad \begin{cases} S\alpha\beta = \dfrac{1}{2}(\alpha\beta + \beta\alpha) \quad (^1), \\ V\alpha\beta = \dfrac{1}{2}(\alpha\beta - \beta\alpha). \end{cases}$$

---

(1) Nous avons supprimé ici le point de la multiplication quaternionienne (n° 54, Remarque II), ce qui ne présente évidemment aucune ambiguïté.

En résumé, les symboles propres au calcul des quaternions sont S, V, T, U, K. Dans le cas de deux vecteurs et lorsque le quaternion $\alpha.\beta$ n'intervient pas, on pourra souvent écrire par abréviation $\alpha\beta$ au lieu de $S\alpha\beta$ et $\alpha\times\beta$ au lieu de $V\alpha\beta$ (Gibbs). De même, nous emploierons rarement le symbole T appliqué à un vecteur, en remplaçant $T\alpha$ par a. Nous avons dit également (n° 17) que pour simplifier l'écriture, nous écrirons ordinairement, pour le cas d'un *vecteur*, α_0 au lieu de $U\alpha$. De même, nous aurons généralement intérêt à remplacer $K\alpha$ par l'expression effective $-\alpha$ (n° 58). Les notations sont ainsi notablement simplifiées dans le cas très fréquent où l'on ne considère que des produits de *deux* vecteurs au plus.

Il convient d'ajouter que

$$(N)\quad \begin{cases} -\alpha \text{ est le conjugué du vecteur } \alpha \text{ (ou } K\alpha), \\ \alpha^{-1} = -\dfrac{\alpha^2}{a^2} = -\dfrac{\alpha}{a} \text{ est le réciproque du vecteur } \alpha \text{ (ou } \alpha^{-1}). \end{cases}$$

60. Représentation géométrique. — On doit à Hamilton une représentation géométrique très simple du quaternion qui met en évidence la plupart de ses propriétés.

Un quaternion q peut toujours se mettre sous forme du quotient de deux vecteurs, car le quaternion $\alpha.\beta$ se ramène au quotient $\alpha : \beta^{-1}$. Nous pouvons supposer que les deux vecteurs ont *même module*, et même sont unitaires, car la suppression des modules ne fait intervenir qu'un facteur numérique toujours facile à rétablir ensuite. Considérons donc le quaternion (*fig.* 25)

$$q = \frac{OB}{OA} \qquad \text{où} \qquad \overline{OA} = \overline{OB} = 1.$$

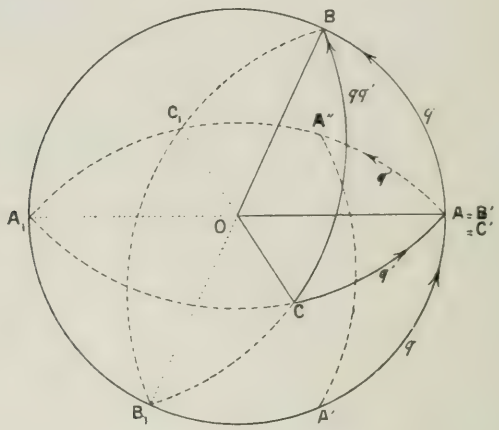
Soient A et B les points de la sphère unité de centre O où ces vecteurs percent la sphère. Les points A et B déterminent sur la sphère un grand cercle que nous pouvons regarder comme le plan du quaternion q. D'autre part, l'arc AB pris avec son signe sur ce cercle dans le sens de description de l'angle O et à partir d'une origine quelconque prise sur le cercle détermine sans ambiguïté la position relative des deux vecteurs OB et OA, c'est-à-dire le quaternion q. Nous pourrons alors dire que cet arc représente le quaternion q et nous écrirons symboliquement

$$q = \widehat{AB} \qquad (q = \text{arc}\,AB).$$

Soit maintenant q' un autre quaternion unitaire. Nous pouvons faire

tourner q et q' dans leurs plans de manière qu'ils prennent les formes $\frac{OB}{OA}$ et $\frac{OA}{OC}$.

Fig. 25.



Nous avons alors [n° 55, (4)]

$$qq' = \frac{OB}{OA}\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OC} = \widehat{CB}.$$

Mais l'arc CB n'est autre chose que la *somme sphérique* des arcs CA et CB, c'est-à-dire que l'on a

$$(1) \qquad \widehat{qq'} = \widehat{q'} + \widehat{q} = CB.$$

L'arc représentatif d'un produit de quaternion est égal à la somme des arcs représentatifs des facteurs *pris en ordre inverse*.

Or l'*addition sphérique n'est pas commutative*, car pour obtenir la somme

$$\widehat{q} + \widehat{q'},$$

qui représenterait $\widehat{q'.q}$, nous devons faire tourner q et q' dans leur plan de manière que OA soit encore le vecteur moyen, ce qui donne

$$\widehat{q'q} = A'B' + B'A'' = A'A''$$

qui sera en général différent de CB en plan et en grandeur.

Les propriétés des quaternions apparaissent très facilement au moyen de cette représentation très simple. Ainsi, pour que le produit soit commutatif, *il faut* (mais il ne suffit pas) que qq' et $q'q$ soient dans le même plan et il faut pour cela que A' soit dans le plan BC;

mais alors AB est droit et A′ se confond avec B. Il faudra, de plus, que A″ soit dans ce même plan. Donc A″ viendra en C_1 et CA sera droit. Mais alors le produit qq' devient CB et $q'q = B_1C_1 = CB$. Il n'est pas commutatif et ne fait que changer de signe. Cela est d'accord avec les principes connus, car dans ce cas AB représente le vecteur OC et CA le vecteur OB. Le produit qq' représente CB = vecteur OA, et le produit $q'q = B_1C_1$ = vecteur OA.

Le produit sera commutatif *seulement dans le cas* où les plans AB et BC *sont confondus*. L'addition sphérique se réduit alors à une addition algébrique d'arcs de cercle qui est commutative. Donc :

La multiplication des quaternions est commutative quand ils sont coplanaires et seulement dans ce cas.

Le conjugué du quaternion $q = \frac{OB}{OA}$ est le quaternion $q' = \frac{OA'}{OA}$ et l'on a

$$\mathrm{T}\,qq' = \mathrm{T}\left(\frac{OB}{OA}\,\frac{OA'}{OA}\right) = \mathrm{T}\,AB + \mathrm{T}\,AA' = 0,$$

d'où

$$qq' = +1 = \frac{OA}{OA}.$$

On a, d'autre part,

$$\mathrm{K}(qq') = BC = BA + AC = \mathrm{T}\,\mathrm{K}q + \mathrm{K}q' = \mathrm{T}\,(\mathrm{K}q'\mathrm{K}q).$$

Le conjugué du produit est égal au produit des conjugués pris en ordre inverse. (Les modules n'interviennent pas.)

On verrait d'une manière tout à fait analogue que :

Le réciproque du produit est égal au produit des réciproques pris en ordre inverse.

(Les modules n'interviennent pas non plus, car ils disparaissent des deux membres.)

Les propositions précédentes sont *vraies pour les vecteurs* qui sont un cas particulier des quaternions.

61. Note sur les bases du calcul des quaternions. — Hamilton n'a pas introduit la notion du quaternion en cherchant à déterminer le produit de deux vecteurs, mais leur quotient.

Posant $\frac{\beta}{\alpha} = q$, l'opération de la division de deux vecteurs ayant un sens non encore défini, il se demande quel sens on peut attribuer à une telle équation.

Pour cela il remarque que, dans l'algèbre ordinaire, de l'équation $\frac{b}{a} = q$, on tire

$$b = qa$$

et que dans la théorie de l'addition des vecteurs il a été montré que si β et α sont deux vecteurs parallèles, on peut poser

$$\beta = x\alpha$$

et, par extension de la définition de la division,

$$\frac{\beta}{\alpha} = x,$$

où x, c'est-à-dire le quotient, est un *nombre* qui, multipliant le diviseur, reproduit le dividende, et qui dépend non seulement de la grandeur relative de α et β, mais encore de leur direction relative, ici égale ou opposée, en ce que ce nombre x est > 0 dans le premier cas et < 0 dans le second.

Partant de cette remarque, il se trouve porté à admettre que le quotient q devra être un facteur qui, agissant sur α, reproduit β, et qui, par conséquent, d'après l'analogie avec le cas simple précédent, devra dépendre, non seulement des grandeurs relatives de β et α, mais encore de leur angle. Mais cet élément q ne peut dépendre *seulement* de cet angle; sinon, ainsi que le remarque Hamilton, le même facteur multipliant un vecteur α donnerait la même expression pour tous les vecteurs formant avec α un cône de révolution ayant comme angle au sommet le double de cet angle. Conclusion qui est en contradiction avec la définition du vecteur, laquelle exige que toutes les génératrices de ce cône aient des expressions différentes.

Nous arriverons à ce résultat en introduisant dans le facteur q non seulement l'*angle* des deux vecteurs, mais les éléments qui déterminent *leur plan*, c'est-à-dire l'orientation du plan diamétral du cône précédent qui les contient. Cette orientation sera déterminée par les *deux* coordonnées nécessaires pour déterminer la direction de la normale à ce plan, ce qui, avec le rapport numérique des longueurs des vecteurs et leur angle, montre que, suivant ces conceptions, le rapport $\frac{\beta}{\alpha}$ ou le facteur q doit dépendre de *quatre* éléments numériques. Il faudra, de plus, admettre une fois pour toutes un *sens* déterminé pour les angles.

Mais on remarquera que le facteur q ainsi défini sera le même

lorsque l'angle formé par α et β tournera *dans son plan* autour de son sommet en conservant la même grandeur. En particulier, *dans un plan donné*, le rapport de deux vecteurs unités rectangulaires entre eux sera le même quels que soient ces vecteurs, et l'on aura, par conséquent (*fig.* 26),

$$\frac{OB}{OA} = \frac{OA'}{OB};$$

d'où, par multiplication,

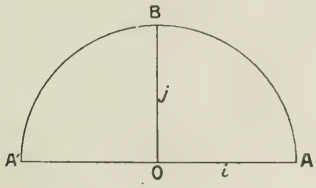
$$\frac{OA'}{OB}\,\frac{OB}{OA} = \frac{OA'}{OA} = -1,$$

c'est-à-dire

$$\left(\frac{j}{i}\right)^2 = -1,$$

en désignant par i et j les vecteurs unitaires OA et OB.

Fig. 26.



Mais la position du plan OAB est complètement définie par le vecteur k, unité perpendiculaire à ce plan et dirigé dans un sens tel que la rotation soit, par exemple, positive de OA vers OB par rapport à k. Ceci suggère de poser

$$\frac{j}{i} = k,$$

d'où

$$k^2 = -1,$$
$$j = ki.$$

Une opération analogue fournirait les équations

$$i^2 = -1, \qquad j^2 = -1.$$
$$k = ij, \qquad i = jk.$$

D'autre part, on aura, en suivant ces principes,

$$\frac{i}{j} = \frac{OA}{OB} = -k,$$

d'où

$$i = -kj,$$

et finalement, par conséquent,

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$
$$i = jk = -kj,$$
$$j = ki = -ik,$$
$$k = ij = -ji,$$

d'où il est aisé de conclure l'équation [A]. (Voir *Éléments*, **101** et suivants.)

Il faudrait bien se garder de croire, d'ailleurs, que c'est sur des bases aussi peu assurées que le maître a établi sa méthode. Elles ne servent, dans sa pensée, et c'est ainsi qu'il faut les concevoir, qu'à donner une illustration de la suite des idées qui ont conduit l'inventeur à prévoir qu'il aurait affaire avec certaines données nouvelles, telles que celle de la non-commutativité de la multiplication et une interprétation réelle de l'imaginaire $\sqrt{-1}$, dans un sens tout à fait différent de celui qui lui était jusque-là attribué. L'inventeur des quaternions expose d'ailleurs dans la Préface des *Lectures* l'historique du développement de ses idées, qui est en réalité fort différent de celui que nous venons d'indiquer d'après les *Éléments*, et qui se rapporte plutôt à une série de méditations sur les principes de l'algèbre. La lecture de cette Préface est très attachante, d'autant que l'auteur, avec une rare impartialité, fait à chacun de ses devanciers, dans la voie nouvelle qu'il entreprend de tracer, la part qui lui est due.

CHAPITRE VI.

PRODUITS DE PLUS DE DEUX VECTEURS. FORMULES GÉNÉRALES.

62. Nous allons maintenant faire connaître les formules générales du Calcul, de manière à pouvoir nous passer généralement de la représentation cartésienne qui nous a servi jusqu'ici pour établir les formules.

Nous démontrerons d'abord le théorème suivant : *La multiplication des quaternions est associative et distributive.*

C'est-à-dire que si p, q, r sont trois quaternions quelconques (qui peuvent être des vecteurs), on a

$$(pq)r = p(qr) = pqr,$$
$$p(q+r) = pq + pr.$$

Cette proposition résulte pour les quaternions de ce qu'elle existe pour les unités 1, i, j, k du système. Il suffit de montrer que les équations précédentes ont lieu en posant :

$$p = w + ai + bj + ck,$$
$$q = w' + a'i + b'j + c'k,$$
$$r = w'' + a''i + b''j + c''k,$$

ce qui se montre immédiatement.

On peut aussi démontrer la première propriété directement au moyen de la représentation géométrique du Chapitre précédent ; on a

$$\Delta[p(qr)] = \Delta(qr) + \Delta p = \Delta r + \Delta q + \Delta p,$$

et de même

$$\Delta[(pq)r] = \Delta r + \Delta(pq) = \Delta r + \Delta q + \Delta p.$$

Hamilton a d'ailleurs donné plusieurs autres démonstrations de ce principe (*E*, 212, 223, 269, 272).

63. Deux formules fondamentales. — On a les théorèmes suivants :

I. *Le scalar d'un produit de trois vecteurs ne dépend que de l'ordre cyclique des termes et change de signe quand on change cet ordre.*

II. *On a la formule*

$$V\alpha\beta\gamma = V\gamma\beta\alpha.$$

Ces formules se démontrent facilement à l'aide de la représentation géométrique du Chapitre précédent. La démonstration analytique a l'avantage de fournir la valeur de $S\alpha\beta\gamma$ souvent utile.

Soient trois vecteurs

$$\begin{aligned} \alpha &= xi + yj + zk, \\ \beta &= x'i + y'j + z'k, \\ \gamma &= x''i + y''j + z''k. \end{aligned}$$

Remarquons que l'on a

$$S\alpha\beta\gamma = S\alpha(S\beta\gamma + V\beta\gamma) = S\alpha S\beta\gamma + S\alpha V\beta\gamma.$$

Le premier terme est nul, car $S\beta\gamma$ étant un nombre, il s'écrit

$$S\beta\gamma . S\alpha.$$

Or $S\alpha = 0$, puisque le scalar d'un vecteur est nul. On a donc

$$S\alpha\beta\gamma = S\alpha V\beta\gamma$$

ou bien, en remplaçant $V\beta\gamma$ par sa valeur [n° 54 (2)],

$$V\beta\gamma = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix},$$

on a, d'après la formule qui donne le scalar d'un produit de deux facteurs,

$$S\alpha\beta\gamma = -x(y'z'' - y''z') - y(z'x'' - x'z'') - z(x'y'' - y'x'')$$

ou bien

$$(1) \qquad S\alpha\beta\gamma = -\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}.$$

formule très importante qui montre que

$$(2) \qquad S\alpha\beta\gamma = S\beta\gamma\alpha = S\gamma\alpha\beta = -S\beta\alpha\gamma = -S\alpha\gamma\beta = -S\gamma\beta\alpha.$$

La deuxième formule peut se démontrer comme il suit. On a

$$V\alpha\beta\gamma - V\gamma\beta\alpha = V(\alpha\beta\gamma - \gamma\beta\alpha).$$

Décomposons $\alpha.\beta$ en ses parties scalaire et vectorielle, on a

$$\begin{aligned} &V(S\alpha\beta + V\alpha\beta)\gamma - V\gamma(S\alpha\beta - V\alpha\beta) \\ &= \gamma S\alpha\beta + V(\alpha \times \beta)\gamma - \gamma S\alpha\beta + V\gamma.(\alpha \times \beta). \end{aligned}$$

Le premier et le troisième terme s'annulent ; le quatrième terme est égal au deuxième changé de signe, puisque ce sont des produits vectoriels de γ et de $V\alpha\beta$ (c'est-à-dire de deux vecteurs) pris en ordre inverse. Donc finalement

$$(3) \qquad V\alpha\beta\gamma - V\gamma\beta\alpha = 0 \qquad \text{ou} \qquad V\alpha\beta\gamma = V\gamma\beta\alpha.$$

Remarques. — I. L'équation

$$(4) \qquad S\alpha\beta\gamma = 0$$

exprime que les trois vecteurs α, β, γ sont coplanaires, car on peut l'écrire (*voir* supra)

$$S\alpha V\beta\gamma = 0$$

et elle montre alors que $V\beta\gamma$ est perpendiculaire à α, c'est-à-dire que α est parallèle au plan de β et γ.

II. On peut écrire indifféremment

$$S\alpha\beta\gamma = S\alpha V\beta\gamma = S\gamma V\alpha\beta = S(V\alpha\beta).\gamma = S\gamma(\alpha \times \beta) \ldots.$$

64. Formule de double produit vectoriel. — La formule suivante est *d'un emploi continuel.* On a

$$(1) \qquad V\alpha V\beta\gamma = \gamma S\alpha\beta - \beta S\alpha\gamma.$$

On a en effet

$$2V\alpha V\beta\gamma = V\alpha(\beta\gamma - \gamma\beta) = V\alpha\beta\gamma - V\alpha\gamma\beta.$$

Remplaçons $\alpha\beta$ et $\beta\gamma$ par la somme de leur scalar et de leur vecteur ; on aura

$$2V\alpha V\beta\gamma = \gamma S\alpha\beta + V.V\alpha\beta.\gamma - \beta S\alpha\gamma - V.V\alpha\gamma.\beta;$$

ajoutons et retranchons $\beta S\alpha\gamma$, il vient

$$= 2(\gamma S\alpha\beta - \beta S\alpha\gamma) + V.V\alpha\beta.\gamma + \beta S\alpha\gamma - V.V\alpha\gamma.\beta - \gamma S\alpha\beta,$$

mais on a

$$\beta S\alpha\gamma - V.V\alpha\gamma.\beta = V\beta.(S\alpha\gamma + V\alpha\gamma) = V\beta\alpha\gamma$$

et de même

$$\gamma S\alpha\beta - V.V\alpha\beta.\gamma = V\gamma(S\alpha\beta + V\alpha\beta) = V\gamma\alpha\beta.$$

La somme des quatre derniers termes est donc nulle et la formule est démontrée.

A. — Formules générales.

65. De cette formule découlent un grand nombre d'autres formules dont nous citerons les principales, surtout à titre d'exercice. Les plus utiles sont celles qui sont indiquées sous les n^{os} (1), (4), (7). On a

$$(1) \qquad V\alpha\beta\gamma = V\alpha(S\beta\gamma + V\beta\gamma) = \alpha S\beta\gamma - \beta S\alpha\gamma + \gamma S\alpha\beta;$$

d'où, par permutation,

$$(2) \qquad V\alpha V\beta\gamma + V\beta V\gamma\alpha + V\gamma V\alpha\beta = 0.$$

La somme

$$\alpha.V\beta\gamma + \beta.V\gamma\alpha + \gamma.V\alpha\beta$$

est donc *un scalar*, puisque son vecteur est nul. Or, les scalars des trois termes sont égaux (**63**); on a donc

$$(3) \qquad \alpha.V\beta\gamma + \beta.V\gamma\alpha + \gamma.V\alpha\beta = 3S\alpha\beta\gamma.$$

On a souvent à considérer les expressions

$$SV\alpha\beta V\gamma\delta \quad \text{et} \quad V.V\alpha\beta V\gamma\delta.$$

On a

$$SV\alpha\beta V\gamma\delta = S\alpha V\beta V\gamma\delta = S\alpha(\delta S\beta\gamma - \gamma S\beta\delta),$$

d'où

$$(4) \qquad SV\alpha\beta.V\gamma\delta = S\alpha\delta S\beta\gamma - S\alpha\gamma S\beta\delta.$$

On a de même

$$V.V\alpha\beta V\gamma\delta = \delta SV\alpha\beta.\gamma - \gamma SV\alpha\beta.\delta$$

ou

$$(5) \qquad V.V\alpha\beta V\gamma\delta = \delta S\alpha\beta\gamma - \gamma S\alpha\beta\delta.$$

On trouverait de même

$$(6) \qquad V.V\alpha\beta V\gamma\delta = \alpha S\beta\gamma\delta - \beta S\alpha\gamma\delta.$$

En particulier, si $\beta = \gamma$, en remplaçant δ par γ, on a

$$(7) \qquad V.V\alpha\beta V\beta\gamma = -\beta S\alpha\beta\gamma.$$

Dans le Chapitre actuel et dans les exercices qui suivent, nous employons exclusivement les notations S et V d'Hamilton pour pré-

venir toute espèce de fausse interprétation. Mais nous ferons ensuite largement usage des signes simplifiés, parce que nous n'aurons généralement que deux vecteurs en présence.

66. Systèmes réciproques. — Soient α, β, γ trois vecteurs *non coplanaires*. Nous appelons *système réciproque* du système α, β, γ le système des trois vecteurs définis par les équations

$$(1)\qquad \alpha' = -\frac{V\beta\gamma}{S\alpha\beta\gamma}, \qquad \beta' = -\frac{V\gamma\alpha}{S\alpha\beta\gamma}, \qquad \gamma' = -\frac{V\alpha\beta}{S\alpha\beta\gamma}.$$

Il ne faut pas confondre le *système* réciproque des vecteurs, α, β, γ avec les *vecteurs* réciproques α^{-1}, β^{-1}, γ^{-1}.

Réciproquement, α, β, γ sont réciproques de α', β', γ', c'est-à-dire que l'on a

$$(2)\qquad \alpha = -\frac{V\beta'\gamma'}{S\alpha'\beta'\gamma'}, \qquad \beta = -\frac{V\gamma'\alpha'}{S\alpha'\beta'\gamma'}, \qquad \gamma = -\frac{V\alpha'\beta'}{S\alpha'\beta'\gamma'},$$

on a en effet

$$V\beta'\gamma' = V.V\gamma\alpha V\alpha\beta S^{-2}\alpha\beta\gamma = -\alpha S^{-1}\alpha\beta\gamma.$$

D'autre part

$$S\alpha'\beta'\gamma' = -SV\beta\gamma V\gamma\alpha V\alpha\beta.S^{-3}\alpha\beta\gamma,$$

or, on a

$$SV\beta\gamma V\gamma\alpha V\alpha\beta = -SV\beta\gamma.\alpha S\alpha\beta\gamma = -S^2\alpha\beta\gamma.$$

D'où

$$(3)\qquad S\alpha'\beta'\gamma'.S\alpha\beta\gamma = -1,$$

on en déduit (2).

Remarques. — I. Le système $V\alpha'\beta'$, $V\beta'\gamma'$, $V\gamma'\alpha'$ est le réciproque du système $V\alpha\beta$, $V\beta\gamma$, $V\gamma\alpha$ et réciproquement.

Le réciproque de $V\alpha\beta$ dans ce système est en effet

$$-V.V\beta\gamma V\gamma\alpha S^{-1}V\alpha\beta V\beta\gamma V\gamma\alpha = -V.V\beta\gamma V\gamma\alpha S^{-2}\alpha\beta\gamma = V\alpha'\beta'.$$

II. Le système réciproque du système i, j, k est *le système lui-même*, car $S\,ijk = -1$.

III. On a entre les systèmes réciproques les relations

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{l} S\alpha\alpha' = S\beta\beta' = S\gamma\gamma' = -1, \\ S\alpha\beta' = S\beta\alpha' = S\alpha\gamma' = \ldots = 0, \\ V(\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma') = 0. \end{array}\right.$$

Soit alors ρ un *vecteur quelconque*, nous pouvons le décomposer

suivant les trois directions *non coplanaires* α, β, γ. Posons donc

$$\rho = x\alpha + y\beta + z\gamma.$$

Si nous multiplions successivement par α', β', γ' et que nous prenions les scalars du résultat (ce qui s'exprime en disant que *l'on opère sur* ρ *par* $S\alpha'$, $S\beta'$, $S\gamma'$), nous obtenons, en tenant compte de (4),

$$S\alpha'\rho = -x, \qquad S\beta'\rho = -y, \qquad S\gamma'\rho = -z.$$

D'où la *formule importante*

$$\rho = -(\alpha S\alpha'\rho + \beta S\beta'\rho + \gamma S\gamma'\rho). \tag{5}$$

On aurait de même

$$\rho = -(\alpha' S\alpha\rho + \beta' S\beta\rho + \gamma' S\gamma\rho). \tag{6}$$

Si nous remplaçons dans ces formules α', β', γ' par leurs valeurs, il vient

$$\rho S\alpha\beta\gamma = \alpha S\beta\gamma\rho + \beta S\gamma\alpha\rho + \gamma S\alpha\beta\rho. \tag{7}$$

$$\rho S\alpha\beta\gamma = V\beta\gamma S\alpha\rho + V\gamma\alpha S\beta\rho + V\alpha\beta S\gamma\rho. \tag{8}$$

En prenant $\alpha = i$, $\beta = j$, $\gamma = k$, on obtient

$$\rho = -iSi\rho - jSj\rho - kSk\rho. \tag{9}$$

Les formules (5) à (9), qui développent un vecteur suivant trois directions non coplanaires, sont d'un emploi très fréquent.

Nous ne développons pas les produits de quatre vecteurs et plus qui ne donnent lieu à aucune formule générale intéressante. Il sera toujours facile de les obtenir d'après les règles invariables qui précèdent.

B. — Exercices de calcul.

67. Il importe que le lecteur se familiarise avec les formules qui précèdent en les appliquant à des exercices de Calcul pratique. Nous en donnons ci-dessous un certain nombre, choisis parmi les plus caractéristiques, sans toutefois développer complètement les calculs que le lecteur devra achever avec soin. Un certain nombre de ces exercices sont empruntés aux *Lectures* et aux *Éléments*. D'autres sont relevés dans l'excellent ouvrage de Tait, *Traité élémentaire des quaternions*, traduction de M. G. Plarr [1].

---

[1] Paris, 2 volumes, Gauthier-Villars, 1882-1884.

I. *Tirer* ρ *de l'équation*

$$\alpha\rho\beta = \gamma,$$

On utilise la propriété des réciproques. Opérant par α^{-1}, on a

$$\alpha^{-1}\alpha.\rho\beta = \alpha^{-1}\gamma \quad \text{ou} \quad \rho\beta = \alpha^{-1}\gamma,$$

puis

$$\rho\beta\beta^{-1} = \alpha^{-1}\gamma\beta^{-1} \quad \text{ou} \quad \rho = \alpha^{-1}\gamma\beta^{-1}.$$

D'où la règle : Pour faire passer *un facteur d'un membre dans l'autre*, on le met à droite s'il était à droite, à gauche s'il était à gauche, et *on le remplace par son réciproque*. Il faut avoir soin d'opérer successivement *sans interversion de facteurs*.

Ainsi de

$$\alpha\beta\rho\delta\varepsilon\eta = \zeta,$$

on tirera

$$\rho = \beta^{-1}\alpha^{-1}\zeta\eta^{-1}\varepsilon^{-1}\delta^{-1}.$$

II. *Résoudre les équations simultanées suivantes par rapport à* ρ :

$$S\alpha\rho = a,$$
$$S\beta\rho = b,$$
$$S\gamma\rho = c,$$

a, b, c étant des scalars connus.

On emploie [n° 66, (8)] qui donne

$$\rho S\alpha\beta\gamma = a V\beta\gamma + b V\gamma\alpha + c V\alpha\beta.$$

III. *Démontrer les identités suivantes* (Tait) :

$$S(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha) = 2S\alpha\beta\gamma \text{ (développer le premier membre).}$$
$$SV\alpha\beta V\beta\gamma V\gamma\alpha = -S^2\alpha\beta\gamma \quad (cf. \text{ n° } 66).$$
$$SV(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)V(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)V(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta) = -4S^2\alpha\beta\gamma.$$
$$SV(V\alpha\beta V\beta\gamma)V(V\beta\gamma V\gamma\alpha)V(V\gamma\alpha V\alpha\beta) = -S^4\alpha\beta\gamma \text{ [n° 65, (7)].}$$
$$S\delta\varepsilon\zeta = -16S^4\alpha\beta\gamma,$$

où

$$\delta = V[V(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)V(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)],$$
$$\varepsilon = V[V(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)V(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)],$$
$$\zeta = V[V(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)V(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)].$$

IV. *Démontrer la formule* (où α, β, γ et α', β', γ' sont quelconques)

$$S\alpha\beta\gamma.S\alpha'\beta'\gamma' = -\begin{vmatrix} S\alpha\alpha' & S\beta\alpha' & S\gamma\alpha' \\ S\alpha\beta' & S\beta\beta' & S\gamma\beta' \\ S\alpha\gamma' & S\beta\gamma' & S\gamma\gamma' \end{vmatrix}.$$

Développer α' par [n° 66, (8)] $\alpha' S\alpha\beta\gamma = V\alpha\beta S\gamma\alpha' + \ldots$ et opérer par $SV\beta'\gamma'$, puis développer les scalars des vecteurs doubles par [n° 65, (4)].

Cette formule établit la formule de *multiplication des déterminants*.

V. *Trouver les composantes vectorielles d'un vecteur α suivant une direction σ et suivant la direction perpendiculaire à σ et coplanaire à α.*

Soient OP la composante suivant σ et OQ suivant la perpendiculaire. On a (n° 53)

$$OP = -\sigma_0 S\sigma_0\alpha = \sigma S\sigma^{-1}\alpha = \sigma^{-1}S\sigma\alpha \text{ (n° 55)},$$

on a alors

$$OQ = \alpha - OP = \alpha\sigma^{-1}\sigma - \sigma S\sigma^{-1}\alpha = \sigma V\sigma^{-1}\alpha = \sigma^{-1}V\sigma\alpha.$$

VI. *Si nous posons* (φ désignant un signe fonctionnel, *voir* Chap. X)

$$\varphi\rho = \alpha S\lambda\rho + \beta S\mu\rho + \gamma S\nu\rho,$$
$$\varphi'\rho = \lambda S\alpha\rho + \mu S\beta\rho + \nu S\gamma\rho.$$

montrer que l'on a

$$S\rho.\varphi\sigma = S\sigma.\varphi'\rho,$$

quels que soient les vecteurs ρ et σ (il suffit de faire la substitution).

VII. *Dans la même hypothèse et en supposant $S\alpha\beta\gamma$ et $S\lambda\mu\nu \neq 0$, montrer que l'on a*

$$\frac{S\varphi'\alpha\varphi'\beta\varphi'\gamma}{S\alpha\beta\gamma} = \frac{S\varphi'\lambda\varphi'\mu\varphi'\nu}{S\lambda\mu\nu}$$

et que la valeur de ces quotients est égale aussi à

$$\frac{S\varphi\alpha\varphi\beta\varphi\gamma}{S\alpha\beta\gamma} = \frac{S\varphi\lambda\varphi\mu\varphi\nu}{S\lambda\mu\nu}.$$

Calcul un peu long, mais sans difficulté.

VIII. *Vérifier que la valeur de ρ donnée par l'équation*

$$\rho S\alpha\beta = \alpha^{-1}S\alpha\gamma + \beta^{-1}S\beta\gamma - \gamma$$

satisfait à l'équation $V\alpha\rho\beta = \gamma$ (il suffit de faire la substitution).

IX. *Montrer que si* α, β, γ sont *coplanaires, on a*

$$\frac{1}{S\alpha\beta}(\alpha^{-1}S\alpha\gamma + \beta^{-1}S\beta\gamma - \gamma) = \alpha^{-1}S\beta^{-1}\gamma + \beta^{-1}S\alpha^{-1}\gamma - \gamma S\alpha^{-1}\beta^{-1}.$$

En effet, si α, β, γ sont coplanaires, on peut poser

$$\gamma = x\alpha^{-1} + y\beta^{-1}.$$

Remplaçons γ par sa valeur dans les deux membres de la proposée, nous trouvons que les coefficients obtenus pour α^{-1} et β^{-1} dans chacun d'eux sont égaux.

X. α, β, γ *étant coplanaires, exprimer* γ *en fonction de* α *et* β. On peut poser

$$\gamma = x\alpha + y\beta.$$

Opérant par $S\alpha$ et $S\beta$, on a

$$S\alpha\gamma = x\alpha^2 + yS\alpha\beta,$$
$$S\beta\gamma = xS\alpha\beta + y\beta^2.$$

D'où

$$x(\alpha^2\beta^2 - S^2\alpha\beta) = \beta^2 S\alpha\gamma - S\alpha\beta\, S\beta\gamma = SV\alpha\beta\, V\beta\gamma \quad [\text{n}^\circ\ 65,\ (4)],$$
$$y(\alpha^2\beta^2 - S^2\alpha\beta) = \alpha^2 S\beta\gamma - S\alpha\gamma\, S\alpha\beta = SV\alpha\beta\, V\gamma\alpha$$

ou

$$x = S\frac{V\gamma\beta}{V\alpha\beta}, \qquad y = S\frac{V\alpha\gamma}{V\alpha\beta}.$$

XI. *On pose*

$$m = \frac{S\varphi\lambda\varphi\mu\varphi\nu}{S\lambda\mu\nu},$$
$$m_1 = \frac{S(\lambda\varphi\mu\varphi\nu + \mu\varphi\nu\varphi\lambda + \nu\varphi\lambda\varphi\mu)}{S\lambda\mu\nu},$$
$$m_2 = \frac{S(\lambda\mu\varphi\nu + \mu\nu\varphi\lambda + \nu\lambda\varphi\mu)}{S\lambda\mu\nu}.$$

Calculer ces quantités pour les fonctions suivantes (où ρ est la variable à remplacer dans chacune par λ, μ, ν) :

(*a*) $$\varphi = V\alpha\rho\beta,$$

en posant

$$\lambda = \alpha, \qquad \mu = \beta, \qquad \nu = \gamma = \text{un vecteur quelconque};$$

(*b*) $$\varphi = V\alpha\beta\rho,$$

en posant

$$\lambda = \alpha, \qquad \mu = \beta, \qquad \nu = \gamma = \text{un vecteur quelconque};$$

(*c*) $$\varphi = V\alpha\rho,$$

en posant

$$\lambda = \alpha, \qquad \mu = \gamma, \qquad \nu = V\alpha\gamma,$$

on trouvera

$$\begin{array}{llll}
(a) & m = \alpha^2\beta^2 S\alpha\beta, & m_1 = -\alpha^2\beta^2, & m_2 = -S\alpha\beta; \\
(b) & m = \alpha^2\beta^2 S\alpha\beta, & m_1 = 2S^2\alpha\beta + \alpha^2\beta^2, & m_2 = 3S\alpha\beta; \\
(c) & m = 0, & m_1 = -\alpha^2, & m_2 = 0.
\end{array}$$

Par exemple, pour (a), on a à calculer

$$m = \frac{S\alpha^2\beta.\alpha\beta^2.\alpha\beta\gamma}{S\alpha\beta\gamma} = \frac{\alpha^2\beta^2 S\alpha\beta\, S\alpha\beta\gamma}{S\alpha\beta\gamma} = \alpha^2\beta^2 S\alpha\beta, \qquad \ldots.$$

XII. *Même question avec*

$$\varphi\rho = \alpha S\lambda\rho + \beta S\mu\rho + \gamma S\nu\rho.$$

Le calcul est un des meilleurs exercices qui soient, car presque toutes les formules y sont employées, on a

$$\begin{aligned}
\varphi\lambda &= \alpha\lambda^2 + \beta S\alpha\mu + \gamma S\lambda\nu, \\
\varphi\mu &= \alpha S\lambda\mu + \beta\mu^2 + \gamma S\mu\nu, \\
\varphi\nu &= \alpha S\lambda\nu + \beta S\mu\nu + \gamma\nu^2.
\end{aligned}$$

D'où

$$m S\lambda\mu\nu = S(\alpha\lambda^2 + \ldots)(\alpha S\lambda\mu + \ldots)(\alpha S\lambda\nu + \ldots),$$

on trouve

$$= S\alpha\beta\gamma(\lambda^2\mu^2\nu^2 + 2S\lambda\mu\, S\mu\nu\, S\nu\lambda - \lambda^2 S^2\mu\nu - \mu^2 S^2\nu\lambda - \nu^2 S^2\lambda\mu),$$

or, on a

$$\lambda^2\mu^2\nu^2 = \lambda\mu.\nu\mu\lambda = (S + V)(-S + V)\lambda\mu\nu = (-S^2 + V^2)\lambda\mu\nu.$$

Développons $V^2\lambda\mu\nu$ par la formule

$$V\lambda\mu\nu = \lambda S\mu\nu - \mu S\lambda\nu + \nu S\lambda\mu,$$

on trouve

$$\lambda^2\mu^2\nu^2 = -S^2\lambda\mu\nu + \lambda^2 S^2\mu\nu + \mu^2 S^2\lambda\nu + \nu^2 S^2\lambda\mu - 2S\lambda\mu\, S\mu\nu\, S\nu\lambda,$$

et par suite

$$m = -S\alpha\beta\gamma\, S\lambda\mu\nu.$$

Pour le calcul de m_1, on a

$$\begin{aligned}
m_1 S\lambda\mu\nu &= S\lambda(\alpha S\lambda\mu + \beta\mu^2 + \gamma S\mu\nu)(\alpha S\lambda\nu + \beta S\mu\nu + \gamma\nu^2) + \ldots \\
&= S\lambda[\alpha\beta(S\lambda\mu\, S\mu\nu - \mu^2 S\lambda\nu) + \beta\nu(\mu^2\nu^2 - S^2\mu\nu) \\
&\quad + \gamma\alpha(S\mu\nu\, S\lambda\nu - \nu^2 S\lambda\mu)] + S\mu[\ldots] + S\nu[\ldots].
\end{aligned}$$

Le coefficient de λ s'écrit

$$-\alpha\beta S V\lambda\mu V\mu\nu - \beta\gamma S V\mu\nu V\mu\nu - \gamma\alpha S V\mu\nu V\lambda\nu.$$

Ceux de μ et de ν sont

$$-\alpha\beta S V\lambda\mu V\nu\lambda - \ldots,$$
$$-\alpha\beta S V\lambda\mu V\lambda\mu - \ldots.$$

Groupant les termes en $\alpha\beta$, on trouve $-V\alpha\beta S\lambda\mu\nu$ pour leur coefficient.

De même, on trouve pour les coefficients de $\beta\gamma$ et $\gamma\alpha$

$$-V\mu\nu S\lambda\mu\nu \quad \text{et} \quad -V\nu\lambda S\lambda\mu\nu,$$

d'où

$$m_1 = -S(V\alpha\beta V\lambda\mu + V\beta\gamma V\mu\nu + V\gamma\alpha V\nu\lambda).$$

On trouvera ensuite

$$\begin{aligned} S\lambda\mu\nu . m_2 &= S\lambda\mu(\alpha S\lambda\nu + \beta S\mu\nu + \gamma S\nu^2) + \ldots \\ &= S\alpha(V\lambda\mu S\nu\lambda + V\mu\nu S\lambda\lambda + V\nu\lambda S\mu\lambda) + \ldots \\ &= S\alpha(\lambda S\lambda\mu\nu) + \ldots, \end{aligned}$$

d'où

$$m_2 = S(\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu).$$

Nous pensons que le lecteur qui aura étudié soigneusement les procédés employés dans ces transformations sera suffisamment rompu aux règles spéciales du Calcul pour n'avoir plus à craindre d'être arrêté à ce sujet par une difficulté quelconque, et que nous pouvons donc passer à une autre question.

CHAPITRE VII.

DIFFÉRENTIATION DES VECTEURS.

68. Considérons généralement un quaternion $Q = f(q)$ que nous regardons comme une fonction d'un quaternion variable q. Si nous supposons que la variable subisse une variation très petite (c'est-à-dire dont le module est très petit) dq, nous appelons différentielle de Q la limite de l'expression

$$dQ = f(q + dq) - f(q),$$

lorsque dq tend vers zéro.

Un *fait nouveau* se produit ici. C'est que, à cause de la non-commutativité de la multiplication, on ne pourra pas mettre en général ce produit sous l'une des formes

$$F(q).dq \quad \text{ou} \quad dq.F(q)$$

sans que $F(q)$ dépende à la fois de q et de dq. On ne pourra donc pas diviser dQ par dq. En d'autres termes, *il n'y aura pas de dérivée.*

Soit, par exemple, la fonction

$$Q = q^2,$$

on a

$$dq = \lim[(q + dq)^2 - q^2] = \lim[q.dq + dq.q + (dq)^2];$$

Lorsque le module de dq tend vers zéro, on aura

$$dQ = q.dq + dq.q,$$

expression *irréductible* si q et dq ne sont pas coplanaires (n° **60**). Il faut tenir compte de ce fait dans la différentiation des expressions vectorielles et quaternionniennes, en ce sens que l'on ne devra pas changer l'ordre des facteurs d'un produit et des différentielles, par exemple, mais différentier chaque facteur dans la place qu'il occupe (*voir* infra, n° **70-III**, Différentielle d'un produit).

69. Théorème. — *Les signes* S, V, K *sont commutatifs avec le signe d.*

On a en effet

$$q = Sq + Vq,$$

d'où

$$dq = dSq + qVq,$$

mais dq est un quaternion qui est égal à la somme de son scalar et de son vecteur ; on a donc

$$dq = S\,dq + V\,dq,$$

et en égalant ces deux valeurs de dq, on a

$$S\,dq = dS\,q, \qquad V\,dq = dV\,q.$$

En partant de la formule

$$Kq = Sq - Vq,$$

on verrait de même que

$$K\,dq = dK\,q.$$

Remarque. — Le signe T, bien qu'étant un signe d'opération *scalaire*, n'est pas interchangeable avec le signe d et l'on n'a pas, en général, $T\,dq = dT\,q$.

70. Différentielles usuelles. — Nous donnons ci-dessous les différentielles usuelles des fonctions de vecteurs. Elles peuvent servir à calculer toutes les autres.

I. *Différentielle de* ρ^2. — On a

$$dq^2 = \lim[(\rho + d\rho)^2 - \rho^2] = \lim[\rho.d\rho + d\rho.\rho + (d\rho)^2]$$

ou

$$d\rho^2 = \rho\,d\rho + d\rho\,\rho = 2S\rho\,d\rho \quad [\text{n}^\circ\ 59,\ (5)].$$

II. *Différentielle de* $\frac{1}{\rho}$ ou ρ^{-1}.

$$\begin{aligned} d\rho^{-1} &= \lim[(\rho + d\rho)^{-1} - \rho^{-1}] = \lim(\rho + d\rho)^{-1}[1 - (\rho + d\rho)\rho^{-1}] \\ &= \lim(\rho + d\rho)^{-1}[-d\rho.\rho^{-1}] \end{aligned}$$

et à la limite

$$d\rho^{-1} = -\rho^{-1}\,d\rho\,\rho^{-1} = -\frac{1}{\rho}\,d\rho\,\frac{1}{\rho}.$$

III. *Différentielle d'une somme, d'un produit.* — On a évidem-

ment comme en Analyse

$$d(q + q' + \ldots) = dq + dq' + \ldots,$$
$$dq\,q' = dq\,.\,q' + q\,.\,dq',$$
$$dm\,q = m\,dq,$$

où m est un scalar *constant*.

La démonstration serait exactement la même. Remarquer seulement que dans un produit, les facteurs doivent être différentiés à la place où ils se trouvent.

Par exemple

$$d(p.q.r) = dp.qr + p.dq.r + pq.dr.$$

IV. *Différentielle du module* de ρ ou r. — On a

$$r^2 = -\rho^2,$$

d'où

$$2r\,dr = -2\,\mathrm{S}\,\rho\,d\rho \quad (1)$$

ou

$$dr = -\rho_0\,d\rho,$$

on peut aussi écrire

$$\frac{dr}{r} = -\frac{\rho_0\,d\rho}{r} = \mathrm{S}\,\frac{d\rho}{\rho} = \mathrm{S}\,\rho^{-1}\,d\rho.$$

Remarquons que si r est *constant*, on a

$$\rho\,d\rho = 0,$$

c'est-à-dire que *la différentielle d'un vecteur constant* (et en particulier d'un vecteur unité) *est perpendiculaire à ce vecteur*.

V. *Différentielle de* ρ_0. — On a

$$\rho = r\rho_0,$$

d'où par différentiation

$$d\rho = dr\,\rho_0 + r\,d\rho_0,$$

et par suite

$$d\rho_0 = \frac{1}{r}(d\rho - \rho_0\,dr);$$

On peut écrire aussi

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dr}{r} + \frac{d\rho_0}{\rho_0} = \mathrm{S}\,\frac{d\rho}{\rho} + \frac{d\rho_0}{\rho_0},$$

d'où

$$\frac{d\rho_0}{\rho_0} = \frac{d\rho}{\rho} - \mathrm{S}\,\frac{d\rho}{\rho} = \mathrm{V}\,\frac{d\rho}{\rho}$$

ou

$$d\rho_0 = -\rho_0\,\mathrm{V}\,d\rho\,\rho^{-1}.$$

VI. *Différentielle de α^x.* — Soit α un *vecteur unité constant* et x un scalar. On a

$$\alpha^x = \cos x + \alpha \sin x.$$

x étant compté *en angles droits*. D'où

$$d\alpha^x = (-\sin x - \alpha \cos x)\, dx = \alpha(\cos x + \alpha \sin x)\, dx = \alpha^{x-1}\, dx,$$

formule assez souvent employée.

VII. *Exemples.* — Nous avons vu que l'équation (IV)

$$\rho\, d\rho = 0$$

exprime que r est constant. Si l'on a

$$\rho \times d\rho = 0,$$

posons $\rho = r\rho_0$. D'où

$$d\rho = r\, d\rho_0 + \rho_0\, dr.$$

L'équation proposée devient alors

$$V r\rho_0 (r\, d\rho_0 + \rho_0\, dr) = r^2 V \rho_0\, d\rho_0 = 0.$$

équation impossible, puisque $d\rho_0$ étant perpendiculaire à ρ_0 (parce que ρ_0 est unitaire), ne peut lui être parallèle. Il faut donc que $d\rho_0 = 0$, c'est-à-dire que ρ ait *une direction fixe*.

Supposons que l'on ait

$$S\rho\, d\rho\, d^2\rho = 0,$$

on pourra poser

$$d^2\rho = x\, d\rho + y\rho.$$

Opérons par $V\rho$,

$$\rho \times d^2\rho = x\rho \times d\rho,$$

ou bien en posant $\rho \times d\rho = \sigma$,

$$d\sigma = x\sigma \qquad \text{ou} \qquad \sigma \times d\sigma = 0.$$

on voit que σ a une direction fixe. Donc σ_0 est constant et l'on a

$$\rho \times d\rho = m\sigma_0.$$

où m est un scalar.

Opérons par $S\rho$, il vient

$$0 = m\rho\sigma_0.$$

Par suite, ρ est perpendiculaire à σ, c'est-à-dire *parallèle à un plan fixe*.

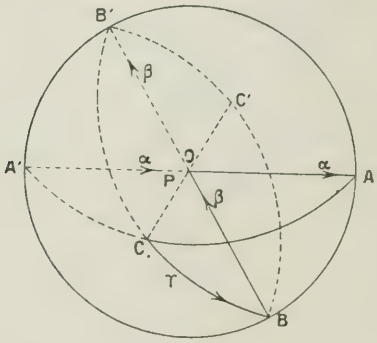
EXERCICES ET NOTES SUR LES CHAPITRES V, VI ET VII.

71. — 1. *Démontrer géométriquement* (n° 60) *les deux formules fondamentales*

$$V\alpha\beta\gamma = V\gamma\beta\alpha,$$
$$S\alpha\beta\gamma = S\beta\gamma\alpha = S\gamma\alpha\beta = -S\gamma\beta\alpha = \ldots.$$

Nous représentons un vecteur par un arc quadrant dans un plan perpendiculaire au vecteur et nous faisons une projection orthogonale sur un plan perpendiculaire à $V\alpha\beta$. Le quadrant représentant α se projette suivant OA (*fig.* 27), celui qui représente β suivant BO.

Fig. 27.



Le cercle sur lequel se trouve le quadrant représentatif de γ se projette suivant une ellipse CBC'B'. On a alors, en appelant P le pôle qui se projette en O,

$$\alpha\beta\gamma = \gamma + \beta - \alpha = CB + BP - PA = CA.$$

D'autre part

$$\gamma\beta\alpha = \alpha + \beta + \gamma = A'P + PB' + B'C = A'C,$$

mais $A'C + CA = \pi$. Les arcs sont *supplémentaires*. Les scalars sont donc de signe contraire et les vecteurs égaux.

2. *Une permutation cyclique ne change pas la valeur de* $S\alpha\beta\gamma\delta$.

On a en effet

$$S\alpha\beta\gamma\delta = S\alpha V\beta\gamma\delta = (\alpha\beta)(\gamma\delta) - (\alpha\gamma)(\gamma\beta) = (\alpha\delta)(\beta\gamma)$$

ou encore

$$S\alpha\beta\gamma\delta = (\alpha\beta)(\gamma\delta) + SV\alpha\beta V\gamma\delta.$$

3. *Soit* ABCD *un quadrilatère inscrit et* α, β, γ *les vecteurs* AB, BC, CA. *Montrer que* $\alpha\beta\gamma$ *est un vecteur parallèle à* δ.

Si nous désignons par ρ le vecteur OA (unitaire par exemple) et par i un vecteur perpendiculaire au plan de la figure, on a

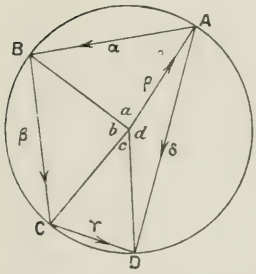
$$\alpha = -2\rho \sin\frac{a}{2}\, i^{\frac{a}{2}},$$

$$\beta = -2\rho \sin\frac{b}{2}\, i^{a+\frac{b}{2}},$$

$$\gamma = -2\rho \sin\frac{c}{2}\, i^{a+b+\frac{c}{2}},$$

$$\delta = -2\rho \sin\frac{d}{2}\, i^{a+b+c+\frac{d}{2}}.$$

Fig. 18.



On en déduit facilement, en tenant compte de $a + b + c + d = 2\pi$,

$$\delta = 2\sin\frac{d}{2}\, i^{\frac{a+b+c}{2}}\rho \qquad \text{et} \qquad \alpha\beta\gamma = +8\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}\, i^{\frac{a+b-c}{2}}\rho.$$

Autre solution par l'Exercice 8, n° 72.

4. *Si* q *est un quaternion quelconque réel, montrer que l'équation*

$$Q^2 = q^2$$

est satisfaite non seulement par $Q = \pm q$, *mais aussi par*

$$Q = \pm\sqrt{-1}\,(Sq\,V_0 q - TVq) \qquad (L., \text{p. } 673).$$

On remarque d'abord que si l'on a un quaternion imaginaire de la forme $a + b\sqrt{-1}$, on a

$$(a + b\sqrt{-1})^2 = a^2 - b^2 + (ab + ba)\sqrt{-1}.$$

En posant $Q = a - b\sqrt{-1}$, on a donc les équations

$$(1) \qquad a^2 - b^2 = q^2,$$

$$(2) \qquad ab - ba = 0,$$

on peut satisfaire à l'équation (2) en posant $a = 0$. L'équation (1) devient alors

$$b^2 = -q^2 \qquad \text{ou} \qquad b_0^2 + b_i^2 + 2b_0 b_i = -q_0^2 - q_i^2 - 2q_0 q_i,$$

en indiquant par les indices 0 et i le scalar et le vecteur. On en déduit

$$b_0^2 - b_i^2 = -q_0^2 - q_i^2,$$

$$(3) \qquad b_0 b_i = -q_0 q_i,$$

éliminons b_i, il vient

$$b_0^4 + b_0^2(q_0^2 + q_i^2) + q_0^2 q_i^2 = 0.$$

Tenant compte que b_0 doit être réel, on trouve donc

$$b_0^2 = -q_i^2 \qquad \text{ou} \qquad b_0 = \pm \mathrm{TV}q :$$

tirant alors b_i de (3), on trouve la valeur cherchée de Q.

5. *α, β, γ étant trois vecteurs unités quelconques, montrer que l'on a*

$$\frac{\beta}{\alpha}\frac{\gamma}{\beta}\frac{\alpha}{\gamma} = -(\beta\alpha^{-1}\gamma)^2.$$

Car le premier nombre est

$$\beta\alpha^{-1}\gamma\beta^{-1}\alpha\gamma^{-1} = -\beta\alpha^{-1}\gamma\beta\alpha^{-1}\gamma,$$

car

$$\alpha^{-1} = -\alpha, \qquad \beta^{-1} = -\beta, \qquad \gamma^{-1} = -\gamma.$$

6. *Soit* DEF *un triangle sphérique et* ABC *les milieux des côtés. Désignons par α, β, γ et δ, ε, ζ les vecteurs* (unités) *des points* A, B, C, D, E, F, *l'origine étant prise au centre de la sphère.*

a. Montrer que l'on a

$$\delta = -\varepsilon\zeta\beta = -\gamma\varepsilon\gamma \text{ cycl.}$$

b. En déduire des expressions analogues pour α, β, γ.

c. Montrer que le quaternion

$$q = \beta\alpha^{-1}\gamma$$

a pour axe δ.

d. Montrer que P *étant le pôle positif de l'arc* AB, *on a* PE = PD (arc AB = c).

e. Montrer que l'arc PC *bissecte l'angle* EPD *et que* EPD = $2c$.

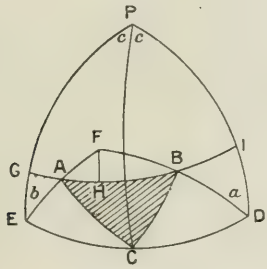
f. Déterminer l'angle du quaternion q.

g. Cas où le point C *est du même côté que le pôle* P *par rapport à* AB.

a. δ s'obtient par rotation de deux droits de ε autour de γ, ou de ζ autour de β. On a donc

$$\delta = \beta\zeta\beta^{-1} = \gamma\varepsilon\gamma^{-1}.$$

Fig. 29.



b. Multiplions la 2e équation (a) par α et la 3e avec α. On a

$$\alpha\varepsilon = \zeta\alpha, \qquad \alpha\zeta = \varepsilon\alpha,$$

d'où

$$\alpha = -\zeta\alpha\varepsilon = -\varepsilon\alpha\zeta \text{ cycl.}$$

c. On a

$$q = \beta\alpha^{-1}\gamma = -\beta\alpha\gamma = \delta\alpha\zeta.\zeta\alpha\varepsilon.\varepsilon\gamma\delta = \delta(\beta\alpha\gamma)\delta = -\delta(\beta\alpha\gamma)\delta^{-1},$$

q ne change pas quand on le fait tourner de 180° autour de δ. Donc δ est l'axe.

d. On a, ϖ étant le vecteur du point P

$$\cos PE = -\varpi\varepsilon = S\varpi\gamma\zeta\alpha = \sin c\, S\alpha\zeta\alpha\, V\alpha\beta = -\sin c\, S\alpha\zeta\beta,$$
$$\cos PD = -\varpi\delta = S\varpi\beta\zeta\beta = \sin c\, S\beta\zeta\beta.V\alpha\beta = -\sin c\, S\alpha\zeta\beta.$$

e. Les triangles ECP et DCP sont égaux. Soit de plus FH perpendiculaire à AB et AB prolongé jusqu'en I et G. Les triangles BHF et

BID sont égaux. D'où BI = BH. De même, on aura AG = AH ; on en déduit GI = 2AB = 2c.

f. On posera [par (c)]

$$q = \frac{\beta}{\alpha}\gamma = \cos\theta + \delta\sin\theta.$$

Or, on a

$$V\frac{\rho}{\alpha} = \varpi\sin c.$$

D'où

$$\cos\theta + \sin c\, S\varpi\gamma = -\cos(CP)\sin c = -\cos\widehat{CEP},$$

d'où

$$\theta = \pi - CEP = \pi - CDP,$$

$$2\theta = 2\pi - (CEP + CDP) = 2\pi - (D + a + E + b).$$

et par (e)

$$2\theta = 2\pi - (D + E + F),$$

$$\theta = \pi - \frac{1}{2}(D + E + F).$$

Posons

$$\text{Excès sphérique de DEF} = D + E + F - \pi = S,$$

on a

$$\theta = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}S.$$

d'où

$$\beta\alpha^{-1}\gamma = \sin\frac{1}{2}S + \delta\cos\frac{1}{2}S.$$

g. Si C se trouve du même côté que le point P, on a la même figure avec P remplacé par le pôle négatif P′, de sorte que P′C = π — PC. On trouve alors

$$\beta\alpha^{-1}\gamma = -\sin\frac{1}{2}S + \delta\cos\frac{1}{2}S.$$

7. *En quoi consiste la différence entre les deux équations*

$$T^2\frac{\rho}{\alpha} = 1 \quad \text{et} \quad \left(\frac{\rho}{\alpha}\right)^2 = -1,$$

α *étant un vecteur donné et* ρ *un vecteur variable* (Tait, *loc. cit.*). En écrivant

$$\frac{\rho}{\alpha} = \cos\theta + \varepsilon\sin\theta,$$

on verra que la première équation représente une sphère de centre O et de rayon a (a = module de α) et la seconde un cercle de rayon a perpendiculaire à α.

8. *Montrer que le vecteur*

$$\rho^{-1} = \frac{1}{2}(\alpha^{-1} + \beta^{-1}),$$

où $\rho^{-1}, \alpha^{-1}, \beta^{-1}$ sont les réciproques (55) des vecteurs ρ, α, β, *représente un point du cercle* OAB.

Car ρ^{-1} est le point milieu de la droite qui joint les points A′B′ et qui est la figure inverse du cercle OAB.

9. *L'expression* (où r est un scalar)

$$\rho = rk^t j^s k j^{-s} k^{-t}$$

peut représenter un vecteur donné quelconque (*E*, 308).

On voit d'abord que cette expression est un vecteur, car son scalar est nul. Le module est r. Son angle avec k est $s\pi$ et l'angle du plan de k et ρ avec le plan ki est $t\pi$.

72. Note sur la définition de la différentielle. Hamilton a défini la différentielle dans ses *Éléments*, sans recourir à la notion d'infiniment petit et sans supposer que l'accroissement donné à la variable soit petit. Cette manière de voir, qui lui paraît plus conforme aux idées de Newton, est de nature à apporter une grande clarté dans la question et nous croyons utile de reproduire ici le passage où Hamilton pose sa définition ainsi que quelques-uns des commentaires et éclaircissements dont il l'accompagne. (*E*, Chap. II, n° 320 et suivants.)

Hamilton adopte la définition suivante [1] :

« J'appelle *différentielles simultanées* (*ou fluxions correspondantes*) *des limites d'équimultiples de différences simultanées et décroissantes.*

« Et inversement, si des différences simultanées quelconques ou un système quelconque de variables tendent ensemble vers zéro conformément à une loi ou à un système de lois; si alors des équimultiples quelconques de ces différences décroissantes tendent toutes ensemble vers un système quelconque de limites finies, on dit que ces limites sont des différentielles simultanées des variables en question du système; et on les désigne comme telles en préfixant la lettre d comme caractéristique de différentiation au symbole de chacune de ces variables.

[1] La Note qui suit est textuellement empruntée aux *Éléments*, n° 320 et suivants.

« Plus complètement et symboliquement, supposons que

$$(\mathrm{I}) \qquad q, \quad r, \quad s, \quad \ldots$$

désignent un système quelconque de variables liées entre elles (quaternions ou autres) et que

$$(\mathrm{II}) \qquad \Delta q, \quad \Delta r, \quad \Delta s, \quad \ldots$$

représentent comme d'usage un système de leurs différences liées (ou simultanées), de sorte que les sommes

$$(\mathrm{III}) \qquad q + \Delta q, \quad r + \Delta r, \quad s + \Delta s, \quad \ldots$$

soient un nouveau système de variables satisfaisant aux mêmes lois de liaison, quelles qu'elles soient, que celles auxquelles satisfait l'ancien système (I). Alors, en remontant par degrés du nouveau système à l'ancien, ou en passant graduellement de l'ancien au nouveau, les différences simultanées (II) peuvent (en général) approcher ensemble de zéro, puisqu'il est évident qu'elles peuvent toutes s'annuler ensemble. Mais si, tandis que l'on suppose que les différences elles-mêmes décroissent ensemble indéfiniment [1], nous les multiplions toutes par un nombre commun, mais croissant n, le système de leurs équimultiples

$$(\mathrm{IV}) \qquad n\,\Delta q, \quad n\,\Delta r, \quad n\,\Delta s, \quad \ldots$$

peut tendre à devenir égal à un système déterminé de limites finies. Et quand cela arrive, ainsi que cela peut être obtenu dans tous les cas ordinaires, en établissant une relation convenable entre l'accroissement de n et le décroissement de Δr, etc., on dit que les limites ainsi obtenues sont des différentielles simultanées des variables en question q, r, s et on les représente comme telles par les symboles

$$(\mathrm{V}) \qquad dq, \quad dr, \quad ds, \quad \ldots.$$

« Afin de ne laisser aucun doute ni obscurité sur l'introduction de la définition précédente, nous l'appliquerons à déterminer la différentielle d'un carré en algèbre [2].... En ce faisant, nous ferons voir que, tandis que l'on retrouve les anciennes règles connues, les

---

[1] On dit qu'un quaternion décroît quand son module décroît et qu'il décroît indéfiniment, quand son module tend vers zéro.

[2] Il y a ici dans le texte « et celle d'un rectangle en géométrie », mais nous n'avons pas reproduit dans cette Note ce dernier exemple donné par l'auteur.

différentielles traitées n'ont pas besoin d'être petites, et que ce serait fausser et non pas corriger les résultats que d'y introduire des termes additionnels dans le but de rendre toutes les différentielles égales aux différences correspondantes....

(1) Considérons donc, en algèbre, l'équation

$$(\mathrm{I}) \qquad y = x^2$$

qui donne

$$(\mathrm{II}) \qquad y + \Delta y = (x + \Delta x)^2,$$

et par suite, comme d'usage,

$$(\mathrm{III}) \qquad \Delta y = 2x\,\Delta x + \Delta x^2.$$

Ou, ce qui revient au même,

$$(\mathrm{IV}) \qquad n\,\Delta y = 2xn\,\Delta x + n^{-1}(n\,\Delta x)^2,$$

où n est un facteur arbitraire, que l'on peut supposer, pour simplifier, être un nombre entier positif.

« (2) Imaginons maintenant que tandis que les différences Δx et Δy, restant toujours liées entre elles et avec x par l'équation (III), décroissent et tendent simultanément vers zéro, le nombre n croît dans l'équation transformée (IV) et augmente indéfiniment de manière que le produit, ou multiple $n\Delta x$ tende vers une limite finie a; ce qui peut arriver, par exemple, en assujettissant Δx à satisfaire constamment à la condition

$$(\mathrm{V}) \qquad \Delta x = n^{-1}a \qquad \text{ou} \qquad n\,\Delta x = a,$$

après avoir choisi une valeur donnée et finie pour a.

« (3) Nous aurons alors avec la dernière condition (V), l'expression suivante par (IV) pour l'équimultiple $n\Delta y$ de l'autre différence Δy :

$$(\mathrm{VI}) \qquad n\,\Delta y = 2xa + n^{-1}a^2 = b + n^{-1}a^2, \qquad \text{si} \qquad b = 2xa,$$

mais comme a, et par conséquent a^2, est donné et fini (2), tandis que le nombre n augmente indéfiniment, le terme $n^{-1}a^2$, dans cette expression (VI) pour $n\Delta y$, tend indéfiniment vers zéro, et sa limite est rigoureusement nulle.

« Par suite, les deux quantités finies, a et b (puisque x est supposée finie), sont deux limites simultanées, vers lesquelles tendent, dans les conditions supposées, les deux équimultiples $n\Delta x$ et $n\Delta y$. Ce

sont donc par définition des différentielles simultanées de x et y et nous pouvons donc écrire

$$\text{(VII)} \qquad dx = a, \qquad dy = b = 2xa,$$

ou, comme il est d'usage après élimination de a,

$$\text{(VIII)} \qquad dy = dx^2 = 2x\,dx.$$

« (4) Et ce ne serait pas perfectionner, mais fausser suivant la définition adoptée, cette expression usuelle de la différentielle du carré de la variable x en algèbre, que d'y ajouter le terme dx^2 par analogie avec la formule (III) pour la différence $\Delta . x^2$. Car cela reviendrait à supposer que pour une valeur donnée et finie a de dx ou de $n\Delta x$, le terme $n^{-1}\,a^2$ ou $n^{-1}\,dx^2$ dans l'expression (VI) pour $n\Delta y$ pourrait ne pas tendre vers zéro, quand le nombre n, par lequel le carré de dx est divisé, augmente indéfiniment.

« (5) Comme exemple arithmétique soient les valeurs données

$$\text{(IX)} \qquad x = 2, \qquad y = x^2 = 4, \qquad dx = 1000$$

et soit demandé de calculer comme conséquence de la définition la valeur numérique de la différentielle simultanée dy. Nous avons les équimultiples suivants de différences simultanées :

$$\text{(X)} \qquad n\,\Delta x = dx = 1000, \qquad n\,\Delta y = 4000 + 1\,000000\,n^{-1},$$

Mais la limite de la $n^{\text{ième}}$ partie d'un million (ou d'un nombre plus grand quelconque, mais donné et fini) est exactement zéro, si n croît sans limite : la valeur cherchée de dy est donc rigoureusement dans cet exemple,

$$\text{(XI)} \qquad dy = 4000.$$

« (6) Et nous voyons que ces deux différentielles simultanées

$$\text{(XII)} \qquad dx = 1000, \qquad dy = 4000$$

ne sont pas, dans cet exemple, égales même approximativement aux deux différences simultanées

$$\text{(XIII)} \qquad \Delta x = dx = 1000, \qquad \Delta y = \overline{1002}^2 - 2^2 = 1\,004\,000$$

qui correspondent à la valeur $n = 1$, bien que, sans aucun doute, par la conception même des différentielles simultanées, comprises dans la définition, il doit exister des équisous-multiples de ces diffé-

rentielles,

$$(\text{XIV}) \qquad n^{-1}\,dx \quad \text{et} \quad n^{-1}\,dy$$

qui doivent être à peu près égaux, pour de grandes valeurs du nombre n, à un système de différences simultanées et décroissantes

$$(\text{XV}) \qquad \Delta x \quad \text{et} \quad \Delta y,$$

et de plus en plus rapprochés de ce système, même en rapport, que tous diminuent ensemble de plus en plus et tendent simultanément vers zéro.

« (7) Par exemple, tandis que les différentielles elles-mêmes conservent leurs valeurs constantes (XII), leurs millionièmes sont respectivement

$$(\text{XVI}) \quad n^{-1}\,dx = 0{,}001 \quad \text{et} \quad n^{-1}\,dy = 0{,}004 \quad \text{si} \quad n = 1000000,$$

et la même valeur du nombre n donne par (X) les valeurs également rigoureuses des deux différences simultanées

$$(\text{XVII}) \qquad \Delta x = 0{,}001, \qquad \Delta y = 0{,}00400\,1,$$

de sorte que ces valeurs des différences décroissantes (XV) peuvent déjà être considérées comme presque égales aux deux équisous-multiples (XIV) et (XVI) des deux différentielles simultanées (XII). Et il est évident que cette approximation serait augmentée en prenant de plus grandes valeurs du nombre n, sans que les valeurs rigoureuses et constantes (XII) de dx et dy en soient aucunement affectées.

« (8) Il est cependant évident aussi que, après avoir pris $y = x^2$ comme dans (IX) nous aurions pu prendre une autre valeur finie pour la différentielle dx au lieu de la valeur 1000. Et nous en aurions déduit une valeur différente (mais encore finie) pour l'autre différentielle dy et non la valeur précédemment déduite 4000 : mais il existerait toujours, dans cet exemple ou pour cette forme de la fonction y et pour cette valeur de la variable x, la relation rigoureuse entre les deux différentielles simultanées dx et dy

$$(\text{XVIII}) \qquad dy = 4\,dx$$

qui est évidemment un cas de l'équation (VIII) et que l'on peut démontrer par les mêmes raisonnements. »

Conformément aux principes précédents, la différentielle d'une

fonction

$$Q = f(q),$$

où la variable q est quelconque, scalar, vecteur ou quaternion, est alors définie par Hamilton (*E*, 324) comme limite pour n infini de

$$dQ = \lim_{n=\infty} n[f(q - n^{-1}\,dq) - fq]$$

et dans le cas de plusieurs variables q, r,..., la différentielle de la fonction

$$Q = F(q, r, \ldots)$$

est alors

$$dQ = \lim_{n=\infty} n[F(q + n^{-1}\,dq, r + n^{-1}\,dr, \ldots) - F(q, r, \ldots)].$$

1. *Trouver au moyen de la définition précédente les différentielles des fonctions*

$$Q = q^2 \qquad \text{et} \qquad Q = q^{-1} \qquad (E, 324).$$

On a

$$\begin{aligned} dq^2 &= \lim n[(q + n^{-1}\,dq)^2 - q^2] \\ &= \lim n[n^{-1} q\,dq + n^{-1}\,dq\,q + n^{-2}\,dq^{-2}] = q\,dq + dq\,q. \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} dq^{-1} &= \lim n[(q + n^{-1}\,dq)^{-1} - q^{-1}] \\ &= \lim n(q + n^{-1}\,dq)^{-1}[1 - (q - n^{-1}\,dq)q^{-1}] = -q^{-1}\,dq\,q^{-1}. \end{aligned}$$

2. *Étant posé*

$$\rho'^2 = -1, \qquad V\rho'\rho'' = \mu$$

(ρ' et ρ'' étant les dérivées première et seconde de ρ par rapport à une variable indépendante scalar), *montrer que* $V\mu\,d\mu$ *est un vecteur parallèle à* ρ'.

De $\rho'^2 = -1$ on tire $S\rho'\rho'' = 0$. Donc ρ', ρ'' est un vecteur et l'on a (en appelant t la variable indépendante)

$$V\mu\,d\mu = V\rho'\rho''\,d\rho'\rho'' = V\rho'\rho''(\rho''^2\,dt + \rho'\rho'''\,dt) = \rho'\,dt\,S\rho'\rho''\rho'''.$$

3. U q *désignant un verseur* (56), *démontrer que l'on a*

$$(1 + K)(dU q\,U q^{-1}) = 0 \qquad (E, 334).$$

Car on a

$$\begin{aligned} K(dU q\,U q^{-1}) &= KU q^{-1} K\,dU q = KU q^{-1}\,dKU q \\ &= U q\,dU q^{-1} = -dU q\,U q^{-1}. \end{aligned}$$

4. *q étant un quaternion quelconque, démontrer les formules :*

$$dTq = SUq^{-1}dq, \qquad \frac{dTq}{Tq} = S\frac{dq}{q}, \qquad \frac{dUq}{Uq} = V\frac{dq}{q},$$

On a

$$T^2q = qKq,$$

d'où

$$2Tq\,dTq = dq\,Kq + q\,dKq = qK\,dq + K(q\,K\,dq)$$
$$= 2Sq\,K\,dq = 2SKq\,dq$$

ou bien, puisque

$$(58) \qquad Tq = TKq \quad \text{et} \quad UKq = Uq^{-1},$$
$$dTq = SUq^{-1}dq.$$

En exprimant alors

$$dq = d(Tq\,Uq) = dTq\,Uq + Tq\,dUq,$$

on en déduit les deux autres égalités.

5. *Démontrer les formules*

$$dSUq = SUq\,V\frac{dq}{q} = -S\frac{dq}{qUVq}\,TVUq$$

et

$$dVUq = VUq^{-1}V(dq\,q^{-1}) \qquad (E, 335).$$

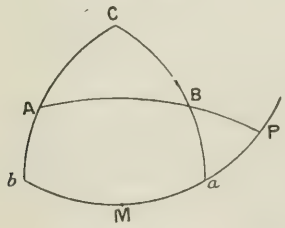
On a

$$dSUq = S\,dUq \quad \text{et} \quad \frac{dUq}{Uq} = V\frac{dq}{q},$$

d'où l'on déduit facilement les relations indiquées.

6. *L'arc AB qui bissecte deux côtés d'un triangle sphérique*

Fig. 30.



a, b, c coupe la base à une distance d'un quadrant de son milieu (Tait, **114**).

Soient α, β, γ les vecteurs de A B c et a, b ceux de a, b. On a, puisque A et B sont les milieux de bc et ac (*fig.* 30),

$$b = -\alpha\gamma\alpha, \qquad a = -\beta\gamma\beta.$$

Le vecteur de P situé à un quadrant du milieu M de ab est congruent au vecteur $a - b$ (car $M = a + b$) et l'on trouve que

$$S\alpha\beta(a - b) = 0,$$

en remplaçant a et b par leurs valeurs. Donc P est dans le plan du cercle AB.

7. *Exprimer les composantes d'un vecteur σ suivant la direction α_0 et suivant une perpendiculaire à cette direction.*

On a d'abord

$$\text{Composante suivant } \alpha_0 = -\alpha_0(\alpha_0\sigma),$$

et alors

$$\begin{aligned}\text{Composante perpendiculaire} &= \sigma + \alpha_0(\alpha_0\sigma) = -\sigma\alpha_0\alpha_0 + \alpha_0(\alpha_0\sigma)\\ &= -\sigma_0 V\sigma_0\alpha_0.\end{aligned}$$

Si α n'est pas unitaire, on peut écrire respectivement.

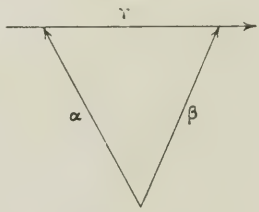
$$\sigma^{-1}S\alpha\sigma \qquad \text{et} \qquad \sigma^{-1}V\sigma\alpha.$$

Ces formules sont souvent utiles.

8. *Inscrire dans une sphère donnée un polygone formé de n côtés parallèles à des directions données.* (*L.* 331 et suiv.)

On remarque que si α et β sont deux vecteurs ayant *même module*

Fig. 31.



et γ un vecteur *quelconque* dirigé suivant la ligne qui joint leurs extrémités, on a (*fig.* 31).

$$\beta = -\gamma\alpha\gamma^{-1},$$

soient PP_1, P_1P_2, ..., $P_{n-1}P_n$ les n côtés du polygone et $\rho, \rho_1, \ldots, \rho_n$ les vecteurs de P, $P_1, \ldots, P_n$. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ les n directions données. On a

$$\rho_1 = -\alpha_1\rho\alpha_1^{-1}, \qquad \rho_2 = -\alpha_2\rho_1\alpha_2^{-1}, \qquad \ldots, \qquad \rho_n = -\alpha_n\rho_{n-1}\alpha_n^{-1},$$

d'où

$$\rho_n = (-1)^n q_n \rho q_n^{-1},$$

en posant

$$q_n = \alpha_n \alpha_{n-1} \ldots \alpha_2 \alpha_1.$$

Le polygone se fermera si l'on a

$$\rho = \rho_n \qquad \text{ou} \qquad \rho = (-1)^n q_n \rho q_n^{-1}.$$

Si n est *pair*, on a

$$q_n \rho = \rho q^n \qquad \text{ou} \qquad V\rho V q_n = 0$$

qui donne par ρ une direction déterminée $\pm V q_n$. *Deux* solutions. Si n est *impair*, on a

$$q_n \rho = -\rho q_n.$$

On a une condition de possibilité

$$S q_n = 0,$$

et alors on a

$$S q_n \rho = 0$$

avec une *infinité* de solutions en prenant comme point de départ un point quelconque du grand cercle perpendiculaire à $V q_n$.

9. *Note sur la différentielle du point.* — Soit P un point variable dont le vecteur est ρ, on a

$$\rho = P - O$$

et par suite

$$dP = d\rho,$$

car $dO = 0$. On voit que la *différentielle du point est un vecteur* équipollent à la différentielle du vecteur de ce point. Le vecteur tangent à la trajectoire du point P peut s'écrire indifféremment

$$\rho' = \frac{d\rho}{dt} \quad \text{ou} \quad \frac{dP}{dt}.$$

Dans cette dernière expression, il faut regarder $\frac{dP}{dt}$ comme la limite de l'expression $\frac{P(t+dt) - P(t)}{dt}$, lorsque dt tend vers zéro d'une façon quelconque.

On aura de même

$$\frac{d^2P}{dt^2} = \frac{d^2\rho}{dt^2} = \frac{d\rho'}{dt}.$$

Cette notation présente quelquefois des avantages en ce qu'elle est indépendante de l'origine.

10. *Note sur l'opérateur i.*

On trouve dans la plupart des Traités de Calcul vectoriel, mention d'un opérateur désigné par la lettre i et qui s'emploie pour représenter les rotations *dans le plan*, c'est-à-dire que si l'on désigne par α un vecteur unité perpendiculaire à un plan (P) et par ρ un vecteur de ce plan, on pose

$$i\rho = V\alpha\rho.$$

En d'autres termes, l'opérateur i a pour effet de faire tourner les vecteurs du plan (P) d'un angle droit dans le sens direct autour de α. On montre alors que l'expression $i^{\varphi}\rho$ représente le vecteur ρ après une rotation de l'angle φ dans le sens direct autour de l'axe du plan (P). Il ne nous a pas paru utile d'introduire cet opérateur particulier, attendu qu'il a les mêmes propriétés que le verseur α^{φ}, lorsque ce verseur opère sur un vecteur ρ qui lui est perpendiculaire. Les règles de calcul sont alors les mêmes que celles qui ont été exposées dans le cas général. On a vu à l'exercice **71** (n° 3) un exemple de l'emploi de ce procédé. Nous en donnons un autre un peu plus loin à propos de l'étude du déplacement d'une figure plane dans son plan [Exercice **94** (1)].

11. *α, β, γ étant trois vecteurs quelconques, on a les formules*

$$(\alpha\beta\gamma)^2 = \alpha^2\beta^2\gamma^2 + 2\alpha\beta\gamma S\alpha\beta\gamma,$$
$$\alpha^2\beta^2\gamma^2 + S^2\alpha\beta\gamma = \alpha^2 S\beta\gamma + \beta^2 S^2\gamma\alpha + \gamma^2 S\alpha\beta - 2S\alpha\beta S\beta\gamma S\gamma\alpha.$$

Résultent des identités

$$(\alpha\beta\gamma)^2 = (S + V)^2\alpha\beta\gamma = (S^2 + V^2 + 2VS)\alpha\beta\gamma,$$
$$\alpha^2\beta^2\gamma^2 = \alpha\beta\gamma\gamma\beta\alpha \qquad = (S - V)(-S - V)\alpha\beta\gamma = -(S^2 - V^2)\alpha\beta\gamma.$$

On obtient la première formule par soustraction des deux identités

$$(\alpha\beta\gamma)^2 - \alpha^2\beta^2\gamma^2 = 2S^2 + 2VS = 2S(S + V).$$

La deuxième formule est l'expression que l'on obtient en développant $V^2\alpha\beta\gamma$ dans la seconde identité.

12. *Démontrer la formule fondamentale de trigonométrie sphérique*

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B.$$

L'application de l'interprétation du verseur

$$U\alpha\beta = -\cos\theta + \varepsilon\sin\theta,$$

où θ est l'angle compris entre 0 et π formé par α et β, et ε un vecteur unité perpendiculaire à α et β dans le sens positif, donne un grand nombre de propositions de trigonométrie sphérique, en considérant un triangle sphérique tracé sur la sphère unité. On a, en effet,

$$\cos a = -S\beta\gamma, \qquad \cos b = -S\gamma\alpha, \qquad \cos c = -S\alpha\beta.$$
$$\sin a = TV\beta\gamma, \qquad \sin b = TV\gamma\alpha, \qquad \sin c = TV\alpha\beta.$$

D'autre part, les vecteurs $UV\alpha\beta$, $UV\beta\gamma$, $UV\gamma\alpha$ forment un système réciproque des vecteurs α, β, γ, et l'on a donc

$$SUV\gamma\alpha\, UV\alpha\beta = \cos A,$$
$$TVUV\gamma\alpha\, UV\alpha\beta = \sin A, \qquad \ldots,$$

de sorte qu'une équation vectorielle ou scalaire entre les vecteurs α, β, γ, donne lieu à une interprétation sur la sphère.

Pour le théorème proposé, il suffit d'interpréter ainsi l'équation

$$SV\alpha\beta V\beta\gamma = \beta^2 S\alpha\gamma - S\alpha\beta S\gamma\beta,$$

en remarquant que

$$SV\alpha\beta V\beta\gamma = TV\alpha\beta\, TV\beta\gamma\, SUV\alpha\beta\, UV\beta\gamma.$$

13. *Interpréter trigonométriquement, d'après les principes de l'exercice précédent, les expressions suivantes où α, β, γ désignent trois vecteurs unitaires quelconques :*

$$(a)\quad S\alpha\beta\gamma, \qquad (b)\quad UV\alpha\beta V\beta\gamma, \qquad (c)\quad V^2\alpha\beta\gamma \qquad (\text{Tait, 111, 113}).$$

a. On remarque que

$$VV\alpha\beta V\beta\gamma = -\beta S\alpha\beta\gamma,$$

d'où

$$TVV\alpha\beta V\beta\gamma = S\alpha\beta\gamma = S\alpha V\beta\gamma - S\beta V\gamma\alpha = S\gamma V\alpha\beta$$

ou

$$\sin c \sin a \sin B = S\alpha\beta\gamma = \sin a \sin p_a = \sin b \sin p_b = \sin c \sin p_c,$$

où p_a est l'arc mené du point A perpendiculairement sur BC.

$$(b)\qquad V\alpha\beta V\beta\gamma = (S + V)V\alpha\beta V\beta\gamma = \sin a \sin c(\cos B - \beta \sin B),$$

d'où

$$UV\alpha\beta V\beta\gamma = \cos B - \beta \sin B, \qquad UV\gamma\beta V\beta\alpha = \cos B + \beta \sin B,$$

ce sont des verseurs dont l'axe est β et l'angle $= B$.

c. On a

$$-V^2\alpha\beta\gamma = S^2\beta\gamma + S^2\gamma\alpha + S^2\alpha\beta + 2S\alpha\beta S\beta\gamma S\gamma\alpha$$

ou

$$1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c - 2\cos a \cos b \cos c = \sin^2 a \sin^2 b \sin^2 C.$$

14. *Démontrer la formule* (où q et r sont des quaternions quelconques)

$$r^{-1}(r^2 q^2)^{\frac{1}{2}} q^{-1} = \mathrm{U}(rq + \mathrm{K}r\,\mathrm{K}q) \qquad (L, \text{ p. } 587).$$

On posera

$$r^{-1}(r^2 q^2)^{\frac{1}{2}} q^{-1} = t.$$

d'où

$$(r^2 q^2)^{\frac{1}{2}} = rtq \qquad \text{ou} \qquad r^2 q^2 = rtq\,rtq \qquad \text{et} \qquad rq = tq\,rt.$$

$$\mathrm{K}q\,\mathrm{K}r = t^{-1}\mathrm{K}r\,\mathrm{K}q\,t^{-1}, \qquad \mathrm{K}r\,\mathrm{K}q = t\,\mathrm{K}q\,\mathrm{K}r\,t,$$

ou bien

$$\mathrm{U}(rq \pm \mathrm{K}r\,\mathrm{K}q) = t\,\mathrm{U}(qr \pm \mathrm{K}q\,\mathrm{K}r)\,t.$$

Posons

$$s = \mathrm{U}(qr \pm \mathrm{K}q\,\mathrm{K}r),$$

$$\mathrm{K}s = \pm t\,st,$$

$$s\,\mathrm{K}s = (\mathrm{T}s)^2 = 1 = \pm st\,st, \qquad \text{d'où} \qquad st = \pm 1,$$

$$t = \pm s^{-1} = \pm \mathrm{U}\mathrm{K}s,$$

ce qui est la transformation indiquée (*voir* Tait, n° 120).

CHAPITRE VIII.

APPLICATIONS A LA GÉOMÉTRIE ET A LA MÉCANIQUE.

A. — Applications géométriques.

73. La ligne droite et le plan. Nous savons (20) que l'équation

$$(x+y)\rho = x\alpha + y\beta,$$

où ρ est un vecteur variable et α et β deux vecteurs constants, tandis que x et y sont des scalars quelconques, représente l'équation de la droite passant par les points A, B dont les vecteurs sont respectivement α et β [1]. On peut écrire cette équation sous la forme

$$(1) \qquad \rho = x\alpha + (1-x)\beta.$$

D'autre part, l'équation

$$(2) \qquad \rho = \beta + x\alpha$$

représente la droite menée par l'extrémité du vecteur β, parallèlement au vecteur α.

En éliminant x on peut aussi écrire l'équation de la droite sous la forme

$$(3) \qquad V(\rho - \beta)\alpha = 0,$$

qui exprime que le vecteur $\rho - \beta$ est parallèle à α.

Un plan mené par l'origine *perpendiculairement* au vecteur α aura pour équation

$$(4) \qquad S\alpha\rho = 0 \qquad \text{ou} \qquad \alpha\rho = 0$$

en supprimant le signe S, car cette équation exprime que ρ est perpendiculaire à α.

---

[1] Nous désignerons dorénavant le point A dont le vecteur est α par la notation point A(α) ou même point α pour abréger le discours.

Si le plan, perpendiculaire à α est assujetti à passer par un point donné β, son équation sera

$$(5) \qquad \alpha(\rho - \beta) = 0,$$

qui exprime que le vecteur $\rho - \beta$ est perpendiculaire à α. La distance de l'origine à ce plan s'obtiendra en posant $\rho = x\alpha$. D'où

$$x\alpha^2 = \alpha\beta$$

ou

$$(6) \qquad \delta = x\alpha = \alpha^{-1} S\alpha\beta.$$

La distance du point γ au même plan s'obtiendra en y transportant l'origine et remarquant que α ne change pas par le changement d'origine, puisque α n'indique ici qu'une direction. On aura donc

$$(7) \qquad \delta = \alpha^{-1} S\alpha(\beta - \gamma) = -\alpha^{-1} S\alpha(\gamma - \beta).$$

La distance de l'origine à la droite (2),

$$\rho = \beta - x\alpha$$

s'obtiendra en menant par l'origine un plan perpendiculaire à α et prenant son intersection avec la droite. On a donc à résoudre les deux équations

$$S\alpha\rho = 0 \qquad \text{et} \qquad \rho = \beta + x\alpha.$$

Substituant ρ dans la première, on obtient

$$\alpha\beta + x\alpha^2 = 0 \qquad \text{ou} \qquad x\alpha = -\alpha^{-1} S\alpha\beta.$$

Le point de rencontre cherché est donc

$$(8) \qquad \rho = \beta - \alpha^{-1} S\alpha\beta = \alpha^{-1} V\alpha\beta.$$

La distance du point β à la droite menée par l'origine parallèlement à α serait $-\alpha^{-1} V\alpha\beta$.

Plus courte distance de deux droites. — Soient deux droites menées respectivement par les points β et β', parallèlement aux vecteurs α et α'. Elles auront pour équation

$$\rho = \beta + x\alpha,$$
$$\rho' = \beta' + y\alpha'.$$

La plus courte distance est perpendiculaire à chacune d'elles et,

par conséquent, parallèle à $V\alpha\alpha'$. Menons par la droite ρ' un plan Q parallèle à la droite ρ. Ce plan aura pour équation, puisqu'il passe par le point β',

$$S(\varpi - \beta')\alpha\alpha' = 0.$$

La distance du point β de la droite ρ à ce plan est, d'après ce qui précède (7),

$$(9) \qquad \delta = -(V\alpha\alpha')^{-1} S(\beta - \beta')\alpha\alpha'.$$

C'est la distance vectorielle cherchée. Elle est comptée de la droite ρ vers la droite ρ'. On peut écrire

$$(9b) \qquad \delta = zV\alpha\alpha' \qquad \text{avec} \qquad z = \frac{S\alpha\alpha'(\beta - \beta')}{T^2 V\alpha\alpha'}.$$

Un cas particulier important parce qu'il a de nombreuses applications dans la théorie des courbes gauches et des surfaces réglées est celui ou les deux droites ρ et ρ' sont infiniment voisines. On a alors en remplaçant β' par $\beta + d\beta$ et α' par $\alpha + d\alpha$,

$$(9c) \qquad \delta = zV\alpha\, d\alpha \qquad \text{avec} \qquad z = \frac{S\alpha\, d\alpha\, d\beta}{T^2 V\alpha\, d\alpha}.$$

Si α est un vecteur unité, on a

$$V\alpha\, d\alpha = \alpha\, d\alpha,$$

d'où

$$(9d) \qquad \delta = z\alpha\, d\alpha \qquad \text{avec} \qquad z = \frac{S\alpha\, d\alpha\, d\beta}{T^2\, d\alpha}.$$

Cherchons dans ce dernier cas le pied de la perpendiculaire commune aux deux droites infiniment voisines. Menons par la droite ρ un plan perpendiculaire au plan Q. Ce plan aura pour équation, puisqu'il contient α et $V\alpha\alpha'$,

$$0 = S(\varpi - \beta)V\alpha V\alpha\alpha' = S(\varpi - \beta)V\alpha V\alpha\, d\alpha = S(\varpi - \beta)\, d\alpha.$$

Nous cherchons le point de rencontre de ce plan avec la droite ρ en y remplaçant ϖ par

$$\rho' = \beta + d\beta - u(\alpha + d\alpha).$$

On trouve ainsi, pour le pied cherché,

$$(10) \qquad = \beta - \alpha\frac{S\, d\alpha\, d\beta}{(d\alpha)^2}, \qquad \text{où} \qquad T\alpha = 1.$$

La distance q de ce point au point correspondant de la courbe direc-

trice (abscisse du pied de la perpendiculaire commune) est donc

$$q = -\frac{S\,d\alpha\,d\beta}{(d\alpha)^2}. \tag{106}$$

On obtiendrait les mêmes résultats en cherchant la distance minimum de deux droites. On a à exprimer dans ce cas que la distance des points

$$\rho_1 = \beta + x\alpha,$$
$$\rho_2 = \beta' + y\alpha'$$

est minimum. Ceci s'exprimera en écrivant que la différentielle de $T(\rho_1 - \rho_2)$ (et non celle de $\rho_1 - \rho_2$) est nulle [1], ce qui donne

$$dT(\rho_1 - \rho_2) = 0$$

ou

$$S(\rho_1 - \rho_2)\,d(\rho_1 - \rho_2) = 0$$

c'est-à-dire

$$S(\rho_1 - \rho_2)(\alpha\,dx - \alpha'\,dy) = 0,$$

et, par suite, puisque dx et dy sont indépendants, on a les deux équations

$$S\,\alpha(\rho_1 - \rho_2) = 0,$$
$$S\,\alpha'(\rho_1 - \rho_2) = 0,$$

qui montrent que la plus courte distance est perpendiculaire à chacune des droites. La question se terminerait alors comme ci-dessus.

74. On obtient entre les propositions concernant la droite et le plan une corrélation analytique effective en employant systématiquement des coordonnées vectorielles particulières qui correspondent en réalité aux coordonnées pluckériennes de la droite. Soit ρ le vecteur d'un point Q du plan (P) et c la normale abaissée de l'origine sur le plan. L'équation du plan est

$$c(\rho - c) = 0,$$

ou bien, en posant

$$u = c^{-1},$$
$$\rho u - 1 = 0.$$

Si u est fixe, cette équation représente une infinité de points ρ situés dans le plan (P). C'est *l'équation du plan u*. Le vecteur u est la *coordonnée* de (P).

---

[1] En exprimant que $d(\rho_1 - \rho_2) = 0$ on écrit, non pas que le module ou la distance de ρ_1 à ρ_2 est constante, mais que le vecteur $\rho_1 - \rho_2$ a une *direction* constante *et* une longueur constante.

Si ρ est fixe, cette équation représente une infinité de plans u passant par ρ : c'est *l'équation du point* ρ. Le vecteur ρ est la *coordonnée* du point Q.

L'équation $u = 0$ représente un plan passant par l'origine, car elle est satisfaite pour $\rho = 0$.

Deux plans u_1 et u_2 sont parallèles si l'on a $u_1 \times u_2 = 0$. Ils sont perpendiculaires si $u_1 u_2 = 0$.

L'équation $\rho u = 0$ représente un point à l'infini, car elle est vérifiée par $u = 0$.

Deux points ρ_1 et ρ_2 sont collinéaires avec l'origine si $\rho_1 \times \rho_2 = 0$.

Une droite est définie par deux points ρ_1 et ρ_2, c'est-à-dire par la différence $m = \rho_1 - \rho_2$, et le moment du vecteur $\rho_1 \rho_2$ par rapport à l'origine, soit

$$n = \rho_1 \times \rho_2 ;$$

m et n sont les coordonnées *radiales* de la droite.

Une droite est déterminée par deux plans u_1 et u_2 ou bien par la différence $p = u_1 - u_2$ et par le vecteur $q = u_1 \times u_2$ qui donne sa direction. p et q sont les coordonnées *axiales* de la droite.

On a d'ailleurs les relations scalaires

$$mn = 0, \qquad pq = 0,$$

ce qui réduit bien à *cinq* le nombre des coordonnées scalaires de la droite.

M. J. Guiot, auquel nous empruntons les indications précédentes, a traité au moyen de cette notation la théorie des ponctuelles, des faisceaux de droites et de plans et du complexe linéaire, ainsi que quelques applications au complexe quadratique. L'Introduction de ce petit Ouvrage contient une intéressante étude historique de quelques points de l'histoire des vecteurs [1].

75. La sphère. — L'équation d'une sphère de centre α et de rayon R est

$$T(\rho - \alpha) = R$$

ou

$$(1) \qquad (\rho - \alpha)^2 = -R^2.$$

Si le centre est à l'origine ($\alpha = 0$), elle se réduit à

$$\rho^2 = -R^2$$

---

[1] J. Guiot, *Le Calcul vectoriel et ses applications à la Geometrie réglée*. Paris, A. Hermann et fils, 1912.

et si l'origine est sur la surface ($\alpha^2 = -R^2$), l'équation devient

$$\rho^2 - 2S\alpha\rho = 0$$

ou

$$S\rho(\rho - 2\alpha) = 0.$$

Sous cette forme, elle exprime que les vecteurs qui joignent un point de la sphère aux extrémités d'un diamètre sont rectangulaires.

L'équation (1) développée s'écrit

$$\rho^2 - 2S\alpha\rho + \alpha^2 - R^2 = 0.$$

Ce qui montre que toute équation scalar de la forme

$$A\rho^2 + 2BS\alpha\rho + C = 0, \qquad \text{où} \qquad A \neq 0$$

représente une sphère, car on pourra toujours l'identifier à l'équation (1).

Soit S′ une deuxième sphère quelconque de rayon R′ ayant son centre en β,

$$S' = (\rho - \beta)^2 + R'^2 = 0.$$

L'intersection de ces deux sphères (1) et (S′) se trouvera sur la surface

$$(a) \qquad (\rho - \alpha)^2 + R^2 = (\rho - \beta)^2 - R'^2,$$

c'est-à-dire le plan

$$(2) \qquad 2S(\beta - \alpha)\rho + \alpha^2 - \beta^2 + R^2 - R'^2 = 0$$

qui est perpendiculaire à la ligne des centres $\beta - \alpha$. L'intersection est donc une section plane de chacune des deux sphères et par conséquent un cercle.

Le plan (2) s'appelle *plan radical* des deux sphères. Il est *toujours réel*, même si les deux sphères ne se coupent pas. Cela provient de ce que l'équation (a) peut avoir une autre interprétation qui résulte des considérations suivantes :

Soit $P(\varpi)$ un point quelconque de l'espace et

$$(3) \qquad \rho = \varpi + x\lambda$$

une droite quelconque menée par ce point. Les points d'intersection de cette droite et de la sphère (1) seront donnés par l'équation

$$(\varpi + x\lambda - \alpha)^2 + R^2 = 0$$

ou

$$(4) \qquad \lambda^2 x^2 + 2xS\lambda(\varpi - \alpha) + (\varpi - \alpha)^2 + R^2 = 0.$$

On voit que le produit des distances du point P aux points de rencontre de la droite et de la sphère (obtenu en posant $T\lambda = 1$, ce qui ne diminue en rien la généralité), est

$$-(\varpi - \alpha)^2 - R^2 = d^2 - R^2, \qquad \text{où} \qquad d = CP,$$

c'est-à-dire indépendant de la direction de λ. On appelle ce produit constant *la puissance du point* P *par rapport à la sphère*.

L'équation (a) montre alors que le plan radical peut être défini comme le lieu des points ayant *même puissance* par rapport aux deux sphères, ce qui n'implique pas la condition que ces sphères se coupent pour que les points du lieu soient réels.

Pour que les points de rencontre de la droite et de la sphère soient confondus, c'est-à-dire pour que la droite soit *tangente*, à la sphère, il faut que la direction λ soit telle que les deux valeurs de x de l'équation (4) soient égales, c'est-à-dire

$$(5) \qquad S^2\lambda(\varpi - \alpha) - \lambda^2[(\varpi - \alpha)^2 + R^2] = 0.$$

Si nous remplaçons dans cette équation λ par sa valeur tirée de (3), x s'élimine et nous avons

$$S^2(\rho - \varpi)(\varpi - \alpha) - (\rho - \varpi)^2[(\varpi - \alpha)^2 + R^2] = 0,$$

équation du *cône circonscrit* à la sphère, car tout point de la droite (3) satisfait à cette équation, si λ satisfait à l'équation (5).

Le lieu des points de contact de la sphère et du cône s'obtiendra en remplaçant x par sa valeur dans l'équation (3). Or, les deux valeurs de x sont maintenant égales et l'on a

$$x = -S\lambda(\varpi - \alpha),$$

en supposant encore $T\lambda = 1$. Le lieu est donc

$$\rho = \varpi + \lambda S\lambda(\varpi - \alpha).$$

Opérons par $S(\varpi - \alpha)$, il vient

$$\begin{aligned} S\rho(\varpi - \alpha) &= S\varpi(\varpi - \alpha) + S^2\lambda(\varpi - \alpha) \\ &= S\varpi(\varpi - \alpha) - (\varpi - \alpha)^2 - R^2 \qquad [\text{par (5), où } \lambda^2 = -1] \\ &= S\alpha(\varpi - \alpha) - R^2. \end{aligned}$$

D'où l'équation

$$S(\rho - \alpha)(\varpi - \alpha) = -R^2,$$

équation d'un plan appelé *plan polaire* du point P, qu'on appelle *pôle* de ce plan.

Si le centre de la sphère est à l'origine, cette équation se réduit à

$$S\rho\varpi = -R^2.$$

On voit que *le produit des distances du pôle et du plan polaire au centre de la sphère est égal au carré du rayon.*

Si dans l'équation (5) nous supposons que le point P est sur la sphère, le coefficient de λ^2 s'annule et l'équation se réduit à

$$S\lambda(\varpi - \alpha) = 0$$

ou bien en remplaçant λ par sa valeur tirée de (3),

$$S(\rho - \varpi)(\varpi - \alpha) = 0.$$

Équation d'un plan. Elle exprime que la tangente $\rho - \varpi$, $(= x\lambda)$ est perpendiculaire au rayon de la sphère du point de contact. Ce plan est le *plan tangent* au point P.

On peut l'écrire

$$S(\rho - \alpha)(\varpi - \alpha) + R^2 = 0.$$

La transformée d'une sphère par rayons vecteurs réciproques s'obtiendra en remplaçant dans l'équation de la sphère ρ par $k\varpi^{-1}$, où ϖ est le vecteur de la figure inverse.

Or, on a

$$\varpi^{-1} = -\frac{\varpi}{p^2}, \qquad (\varpi^{-1})^2 = \frac{\varpi^2}{p^4},$$

en désignant par p le module de ϖ. La figure inverse de la sphère

$$A\rho^2 - 2B\alpha\rho + C = 0$$

est donc

$$k^2 A\frac{\varpi^2}{p^4} - 2\frac{Bk}{p^2}\alpha\varpi + C = 0$$

ou bien, en tenant compte de $\varpi^2 = -p^2$,

$$C\varpi^2 - 2Bk S\alpha\varpi - Ak^2 = 0,$$

c'est-à-dire que c'est une *sphère*.

Si l'origine d'inversion est sur la sphère, on a $C = 0$ et la transformée est un *plan*.

B. — Applications cinématiques.

76. Déplacements finis d'un solide. — Nous savons que l'opérateur

(1) $$\varepsilon^m(\quad)\varepsilon^{-m},$$

où ε représente un vecteur unité, fait tourner un vecteur quelconque ρ coniquement de $2m$ angles droits autour du vecteur ε dans le sens direct. Mais si l'on remarque que

$$\varepsilon^m = \cos m\frac{\pi}{2} + \varepsilon \sin m\frac{\pi}{2}$$

est un verseur quelconque et que si l'on pose

$$q = \mathrm{T}q.\varepsilon^m,$$

on aura

$$q^{-1} = \frac{1}{\mathrm{T}q}\varepsilon^{-m};$$

on voit que $\mathrm{T}q$ disparaissant dans l'opération

$$(2) \qquad q(\quad)q^{-1},$$

celle-ci est exactement la même que celle du verseur de q, c'est-à-dire que l'opérateur (2) fait tourner un vecteur quelconque autour de l'axe du quaternion q de deux fois l'angle de ce quaternion.

Un *retournement* autour d'un axe, c'est-à-dire une rotation de 180° autour d'un vecteur quelconque α, s'écrira donc

$$(3) \qquad \alpha\rho\alpha^{-1} \quad \text{ou} \quad -\alpha_0\rho\alpha_0 \quad \text{ou} \quad \alpha^{-1}\rho\alpha.$$

Opérons *deux* retournements successifs autour de deux axes α et β *concourants*. Le résultat sera

$$\beta\alpha\rho\alpha^{-1}\beta^{-1} = \beta\alpha\rho(\beta\alpha)^{-1},$$

c'est-à-dire *une* rotation de deux fois l'angle du quaternion $\beta\alpha$ autour de l'axe de ce quaternion. Or l'angle du quaternion $\beta\alpha$ est $\pi - \theta$, θ étant l'angle de α et β, et son axe est perpendiculaire à α et β, la rotation étant positive de β vers α. Les deux rotations précédentes sont donc équivalentes à une rotation unique de l'angle $2\pi - 2\theta$ autour de l'axe de $\beta\alpha$, c'est-à-dire à une rotation 2θ autour de l'axe de $\alpha\beta$. Donc :

Deux retournements successifs autour de deux axes *concourants* équivalent à *une rotation* autour d'un *axe perpendiculaire aux deux premiers*, d'un angle égal au double de l'angle de ces axes, le sens de la rotation étant celui qui va du premier axe au second.

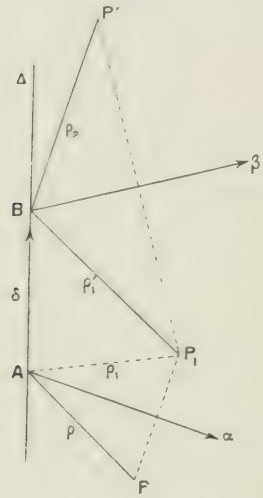
Supposons maintenant que les axes ne se rencontrent pas. Soit Δ (*fig.* 32) leur perpendiculaire commune. Prenons A comme origine.

Le vecteur ρ du point P après retournement autour de α est devenu

$$AP_1 = \rho_1 = \alpha\rho\alpha^{-1}.$$

Si nous opérons un deuxième retournement autour de β, nous

Fig. 15.



devrons prendre comme origine le point B. Soit $\overline{AB} = \delta$. On a alors

$$\rho_1 = \rho_1 - \delta,$$

d'où

$$\rho_2 = \overline{BP'} = \beta\rho_1 - \delta\beta^{-1}$$
$$= \beta\alpha\rho\alpha^{-1}\beta^{-1} - \delta,$$

en remarquant que

$$\beta\delta\beta^{-1} = -\delta.$$

Le premier terme représente une rotation de l'angle 2θ autour de Δ, θ étant l'angle de α et β (cas précédent) et l'on a

$$\rho' = AP' = \beta\alpha\rho\alpha^{-1}\beta^{-1} + 2\delta,$$

c'est-à-dire que le vecteur a *tourné* de l'angle 2θ autour de Δ et que le point P a subi *une translation* 2δ parallèlement à Δ. D'où ce théorème :

Deux retournements successifs autour de deux axes qui ne se rencontrent pas équivalent à un *déplacement hélicoïdal* ayant pour axe leur plus courte distance, dont *l'angle* est *le double* de l'angle des deux axes, et dont la *translation* est *le double* de la distance des

deux axes. Le sens de la rotation et celui de la translation vont du premier axe au deuxième.

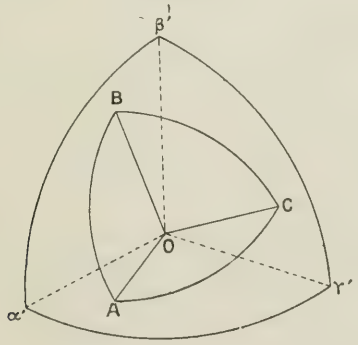
On peut encore énoncer ce résultat de la manière suivante :

Deux retournements successifs autour de deux axes qui ne se rencontrent pas équivalent au *déplacement hélicoïdal* effectué autour de leur plus courte distance qui amènerait le *premier* axe dans une *position symétrique* de celle qu'il occupe par *rapport au second.*

Inversement, ce théorème permet de remplacer un déplacement hélicoïdal par deux retournements, et cela d'une infinité de manières.

77. Le premier théorème nous permet de remplacer une rotation autour d'un axe par deux retournements autour de deux axes qui lui sont perpendiculaires et qui le rencontrent au même point. Appliquons ce théorème au cas de *trois axes concourants* en un point O. Soient α, β, γ ces trois axes supposés par exemple unitaires, de sorte qu'ils rencontrent la sphère unité en trois points A, B, C déterminant sur cette sphère un triangle sphérique ABC. Nous supposons que le sens de A à B soit *négatif* par rapport à C, c'est-à-dire que C se trouve du côté de la normale unité négative du plan AOB, ou

Fig. 33.



que le trièdre OABC est *à gauche* (*fig.* 33). Les rotations ayant lieu dans le sens positif, les axes A, B, C se succèdent donc dans le sens négatif. Soient alors α', β', γ' les arêtes du trièdre supplémentaire de OABC. Les axes β' et γ' sont perpendiculaires à OA et font entre eux un angle $=\pi-A$. Deux retournements successifs autour de γ' et β' seront donc équivalents à une rotation négative $-2(\pi-A)$

ou positive 2 A autour de OA. Cette rotation s'exprime par

$$\alpha^{A}\rho\alpha^{-A}.$$

De même, si nous donnons ensuite une rotation positive 2 B autour de α, elle est équivalente à un retournement autour de β' suivi d'un retournement autour de α'. Le résultat de ces deux rotations sera

$$\beta^{B}\alpha^{A}\rho\alpha^{-A}\beta^{-B}.$$

Nous avons ainsi opéré successivement un retournement autour de γ', deux retournements successifs autour de β' (ce qui donne 360°, c'est-à-dire 0) et un retournement autour de α'. Ceci est donc équivalent à un retournement autour de γ' suivi d'un retournement autour de α'. Donc, si nous ajoutons un nouveau retournement autour de α' (qui donne zéro avec le précédent) suivi d'un retournement autour de γ', le résultat sera deux retournements autour de γ', c'est-à-dire zéro. Mais ces deux derniers retournements sont équivalents à une rotation 2 C. On a donc, quel que soit ρ,

$$\gamma^{C}\beta^{B}\alpha^{A}\rho\alpha^{-A}\beta^{-B}\gamma^{-C}=\rho.$$

D'où le *théorème d'Hamilton* (*L*, 343) :

Trois rotations POSITIVES *autour des trois arêtes d'un trièdre, ces arêtes se suivant en sens* NÉGATIF, *et d'angles égaux aux doubles des angles dièdres du trièdre sont équivalentes à zéro.*

Ceci donne évidemment le moyen de composer *deux rotations finies* quelconques. On peut aussi démontrer le théorème en remarquant que

$$\gamma^{C}\beta^{B}\alpha^{A}(\alpha^{-A}\beta^{-B}\gamma^{-C})=\gamma'\alpha'.\alpha'\beta'.\beta'\gamma'(\gamma'\beta'.\beta'\alpha'.\alpha'\gamma')$$

et que le second membre est une IDENTITÉ. Le raisonnement qui précède n'en est que la traduction en langage ordinaire.

Si nous posons

$$\gamma^{C}\beta^{B}\alpha^{A}=q,$$

nous voyons que, quel que soit ρ, on a

$$q\rho q^{-1}=\rho \qquad \text{ou} \qquad q\rho=\rho q.$$

Ceci montre que q est un *scalar*. Ce scalar est constant, quels que soient A, B, C, car si l'on différentie q, on obtient

$$\gamma^{C-1}\beta^{B}\alpha^{A}dC+\gamma^{C}\beta^{B-1}\alpha^{A}dB+\gamma^{C}\beta^{B}\alpha^{A-1}dA.$$

c'est-à-dire *un vecteur*, car le scalar de chacun des termes est nul puisque $q - \gamma^C \beta^B \alpha^A$ est un scalar. Or la différentielle d'un scalar ne pouvant pas être un vecteur, il en résulte que ce vecteur est nul. Donc q est constant. Appliquons au cas particulier des axes i, j, k, nous aurons

$$q = ijk = -1.$$

Hamilton désigne par x, y, z les angles du trièdre et l'on a alors *l'équation d'Hamilton* (*L.* **280**)

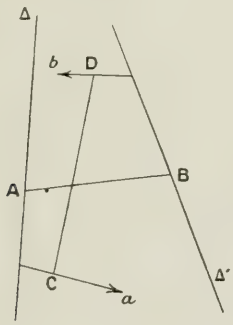
$$\gamma^z \beta^y \alpha^x = -1,$$

qui contient, ainsi qu'il l'a fait remarquer, toute la trigonométrie sphérique.

Il ne faut pas oublier que x, y, z sont comptés *en angles droits*.

78. Théorème d'Halphen [1]. — De même nous pouvons appliquer le deuxième théorème du n° **76** à deux axes hélicoïdaux Δ et Δ'. Soit AB leur plus courte distance (*fig.* 34). Soit a la droite qui est amenée

Fig. 34.



sur AB par le demi-déplacement hélicoïdal Δ (c'est-à-dire une translation égalant la moitié de la translation de ce déplacement, et une rotation égalant la moitié de sa rotation). Soit b la droite en laquelle se transporte AB par le demi-déplacement hélicoïdal Δ'. Le déplacement hélicoïdal Δ est équivalent à un retournement autour de a suivi d'un retournement autour de AB (n° **76**). Le déplacement Δ' s'obtient ensuite par un retournement autour de AB suivi d'un retournement autour de b. Il reste donc un retournement autour de a suivi d'un retournement autour de b, c'est-à-dire un déplacement hélicoïdal

[1] *Nouvelles Annales*, 1882.

dont la translation égale deux fois la plus courte distance CD de ces droites et dont l'angle égale deux fois l'angle de a et de b. C'est le *théorème d'Halphen* qui permet de composer deux déplacements hélicoïdaux finis.

79. **Rotation finie autour d'un point fixe.** — Une rotation finie autour d'un point fixe peut s'obtenir au moyen d'une rotation autour d'un axe passant par ce point. Soit α l'axe de rotation supposé unitaire, et ω l'angle de la rotation. Si nous supposons

$$q = \cos\frac{\omega}{2} + \alpha \sin\frac{\omega}{2},$$

d'où

$$q^{-1} = \cos\frac{\omega}{2} - \alpha \sin\frac{\omega}{2};$$

l'opérateur de la rotation sera $q(\quad)q^{-1}$. Soient a, b, c les angles de l'axe avec les axes de coordonnées; nous poserons :

$$l = \sin\frac{\omega}{2}\cos a,$$

$$m = \sin\frac{\omega}{2}\cos b,$$

$$n = \sin\frac{\omega}{2}\cos c,$$

$$w = \cos\frac{\omega}{2}.$$

Ce sont les *paramètres d'Euler* (¹). Ils sont liés par la relation

$$l^2 + m^2 + n^2 + w^2 = 1,$$

et alors nous avons

$$(a) \qquad q = w + li + mj + nk.$$

Par la rotation ω l'axe i, supposé invariablement fixé au solide, est amené dans une position i' telle que :

$$\begin{aligned} i' &= (w + l + mj + nk)i(w - li - mj - nk) \\ &= (wi - l - mk + nj)(w - li - mj - nk) \\ &= (w^2 + l^2 - m^2 - n^2)i + 2(lm + wn)j + 2(ln - wm)k, \end{aligned}$$

(¹) Darboux (*Théorie des surfaces*) désigne ces paramètres sous le nom de *paramètres quaternionniens*. On les appelle souvent aussi *paramètres d'Olin de Rodrigues*.

on a de même

$$j' = 2(lm - wn)i + (w^2 - l^2 + m^2 - n^2)j + 2(wl + mn)k,$$
$$k' = 2(ln + wm)i + 2(mn - wl)j + (w^2 - l^2 - m^2 - n^2)k.$$

Le déterminant des coefficients est égal à $+1$. Car soit D ce déterminant. On a

$$S i' j' k' = D . S ijk.$$

D'où

$$D = 1.$$

On a donc les formules *contragradiantes* (*cf.* n° 96, VI) :

$$i = (w^2 + l^2 - m^2 - n^2)i' + 2(lm - wn)j' + 2(ln + wm)k',$$
$$j = 2(lm + wn)i' + (w^2 - l^2 + m^2 - n^2)j' + 2(mn - wl)k',$$
$$k = 2(ln - wm)i' + 2(wl + mn)j' + (w^2 - l^2 - m^2 + n^2)k'.$$

Soient X, Y, Z les coordonnées d'un point *après* le déplacement (par rapport aux axes i, j, k) et x, y, z ses coordonnées *avant* le déplacement, on a

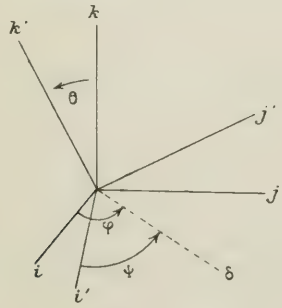
$$\rho = Xi + Yj + Zk = xi' + yj' + zk',$$

et cette équation permettra d'exprimer X, Y, Z en fonction de x, y, z ou inversement à l'aide des transformations précédentes.

On n'aura d'ailleurs pas intérêt, en général, à employer les paramètres, car la solution directe de la question au moyen de l'*opérateur conique* sera, presque toujours, plus simple et plus rapide.

Supposons, par exemple, que l'on considère un déplacement autour d'un point fixe et que l'on détermine la position du solide au moyen de trois axes mobiles qu'il entraîne avec lui et dont la position est déter-

Fig. 35.



minée au moyen des *angles d'Euler*. Soient (*fig.* 35) $Oijk$ les trois axes fixes et $Oi'j'k'$ les axes mobiles. δ étant le vecteur unité dirigé

suivant l'intersection des plans (ij), $(i'j')$ et du même côté de i que j, par exemple, nous désignerons par φ l'angle dont il faut faire tourner i pour l'amener sur δ, par ψ l'angle dont il faut faire tourner i' pour l'amener sur δ, et par θ l'angle dont il faut faire tourner k pour l'amener sur k'. Si α est l'axe de la rotation qui amène le trièdre $Oijk$ en coïncidence avec $Oi'j'k'$ et ω l'angle de la rotation, l'opérateur de cette rotation sera

$$\left(\cos\frac{\omega}{2} + \alpha\sin\frac{\omega}{2}\right)\left(\qquad\right)\left(\cos\frac{\omega}{2} - \alpha\sin\frac{\omega}{2}\right).$$

Calculons le quaternion

$$q = \cos\frac{\omega}{2} + \alpha\sin\frac{\omega}{2}.$$

On peut obtenir le déplacement total de trièdre au moyen de trois rotations successives :

1° Une rotation φ autour de k dont l'opérateur est $k^{\frac{\varphi}{2}}(\quad)k^{-\frac{\varphi}{2}}$;

2° » θ » δ » $\delta^{\frac{\theta}{2}}(\quad)\delta^{-\frac{\theta}{2}}$;

3° » ψ » k' » $k'^{-\frac{\psi}{2}}(\quad)k'^{\frac{\psi}{2}}$.

On a donc

$$q = k'^{-\frac{\psi}{2}}\delta^{\frac{\theta}{2}}k^{\frac{\varphi}{2}}.$$

D'autre part, on a

$$\delta = k^{\varphi}i = (\cos\varphi + k\sin\varphi)i = i\cos\varphi + j\sin\varphi$$

et

$$\begin{aligned} k' = \delta^{\theta}k &= [\cos\theta + \sin\theta(i\cos\varphi + j\sin\varphi)]k \\ &= i\sin\varphi\sin\theta - j\sin\theta\cos\varphi + k\cos\theta. \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} q = &\left[\cos\frac{\psi}{2} - \sin\frac{\psi}{2}(i\sin\varphi\sin\theta - j\sin\theta\cos\varphi + k\cos\theta)\right] \\ &\times\left[\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}(i\cos\varphi + j\sin\varphi)\right]\left(\cos\frac{\varphi}{2} + k\sin\frac{\varphi}{2}\right), \end{aligned}$$

ce qui, après un calcul sans difficulté, prend la forme (pour faire le calcul, remplacer les sinus et cosinus de φ et θ par leurs expressions en fonction des lignes de $\frac{\theta}{2}$ et $\frac{\varphi}{2}$)

$$q = \cos\frac{\varphi - \psi}{2}\cos\frac{\theta}{2} + i\cos\frac{\varphi + \psi}{2}\sin\frac{\theta}{2} + j\sin\frac{\varphi - \psi}{2}\sin\frac{\theta}{2} + k\sin\frac{\varphi - \psi}{2}\cos\frac{\theta}{2}.$$

En identifiant avec (a), on obtient les paramètres d'Euler en fonction de φ, ψ, θ.

Mais on peut obtenir directement les valeurs de i', j', k' en effectuant directement les trois rotations indiquées :

La première rotation transforme i, j, k en i_1, j_1, k_1, tels que

$$\begin{aligned} i_1 &= \delta = k^{\varphi} i = i\cos\varphi + j\sin\varphi, \\ j_1 &= k^{\varphi} j = j\cos\varphi - i\sin\varphi, \\ k_1 &= k. \end{aligned}$$

La deuxième rotation transforme i_1, j_1, k_1 en i_2, j_2, k_2, tels que

$$\begin{aligned} i_2 &= i_1 = \delta, \\ j_2 &= \delta^{\theta} j_1 = j_1\cos\theta + k\sin\theta, \\ k_2 &= k' = \delta^{\theta} k = [\cos\theta + (i\cos\varphi + j\sin\varphi)\sin\theta]k = i\sin\varphi\sin\theta - j\cos\varphi\sin\theta + k\cos\theta. \end{aligned}$$

Enfin, la troisième rotation donne (en remarquant que $\delta j_1 k$ forment un système normal)

$$\begin{aligned} i' &= k'^{-\psi}\delta = [\cos\psi - \sin\psi(k\cos\theta - j_1\sin\theta)]\delta = \delta\cos\psi - j_1\sin\psi\cos\theta - k\sin\theta\sin\psi \\ &= i(\cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi\cos\theta) + j(\sin\varphi\cos\psi - \sin\psi\cos\varphi\cos\theta) - k\sin\theta\sin\psi. \end{aligned}$$

On a ensuite

$$\begin{aligned} j' &= k'^{-\psi} j_2 = (\cos\psi - k'\sin\psi) j_2 = j_2\cos\psi + \delta\sin\psi \\ &= i(\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi\cos\theta) - j(\cos\varphi\cos\theta\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi) + k\sin\theta\cos\psi. \end{aligned}$$

Enfin, on a trouvé

$$k' = i\sin\varphi\sin\theta - j\sin\theta\cos\varphi + k\cos\theta.$$

Le calcul est ainsi beaucoup plus rapide et l'on évite même tout à fait l'introduction des demi-angles de l'opérateur conique parce que les opérations se décomposent en rotations de vecteurs autour d'axes qui leur sont normaux.

Nous trouverons un peu plus loin (n° 88) une application importante de ces formules.

80. **Mouvement instantané d'un solide.** — Tout déplacement fini d'un solide autour d'un point fixe étant une rotation autour d'un axe passant par ce point fixe (ce qui doit se comprendre dans le sens que ce déplacement *peut s'obtenir* par une rotation autour d'un tel axe), il en est évidemment de même d'un déplacement instantané quelconque autour d'un point fixe. La démonstration analytique de ce fait a en même temps l'avantage de nous donner l'expression de l'axe

de rotation. Définissons le solide au moyen de trois axes $Ox_1y_1z_1$ entraînés avec lui dans son mouvement, et soient $Oxyz$ les trois axes fixes. Soit M un point quelconque du solide dont le vecteur est ζ. On a

$$\zeta = xi + yj + zk = x'i_1 + y'j_1 + z'k_1,$$

d'où

$$\frac{d\zeta}{dt} = x'\frac{di_1}{dt} + y'\frac{dj_1}{dt} + z'\frac{dk_1}{dt} + i_1\frac{dx'}{dt} + j_1\frac{dy'}{dt} + k_1\frac{dz'}{dt}.$$

Les trois derniers termes donnent la vitesse relative du point M par rapport aux axes $Ox_1y_1z_1$, qui est nulle. On a donc

$$\frac{d\zeta}{dt} = x'\frac{di_1}{dt} + y'\frac{dj_1}{dt} + z'\frac{dk_1}{dt}.$$

Or il est facile de voir que di_1, dj_1, dk_1 sont *coplanaires*, quels que soient x', y', z'. On a en effet :

$$\begin{aligned} di_1 &= -j_1(j_1\,di_1) - k_1(k_1\,di_1),\\ dj_1 &= -i_1(i_1\,dj_1) - k_1(k_1\,dj_1),\\ dk_1 &= -i_1(i_1\,dk_1) - j_1(j_1\,dk_1), \end{aligned}$$

car $i_1\,di_1 = 0$, etc. ; d'où

$$\Sigma\, di_1 dj_1 dk_1 = -\begin{vmatrix} 0 & j_1\,di_1 & k_1\,di_1 \\ i_1\,dj_1 & 0 & k_1\,dj_1 \\ i_1\,dk_1 & j_1\,dk_1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & j_1\,di_1 & k_1\,di_1 \\ -j_1\,di_1 & 0 & k_1\,dj_1 \\ -k_1\,di_1 & -k_1\,dj_1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

à cause de $i_1j_1 = 0$, d'où $i_1\,dj_1 + j_1\,di_1 = 0$.

Les $d\zeta$ sont donc *coplanaires*, quels que soient x', y', z'. Par suite, ils sont *perpendiculaires à une même droite* qui est la *normale au plan*, et dont la direction est donnée par

$$\Sigma\frac{di_1}{dt}\frac{dj_1}{dt} = -k_1\left(j_1\frac{di_1}{dt}\right)\left(i_1\frac{dj_1}{dt}\right) - i_1\left(j_1\frac{di_1}{dt}\right)\left(k_1\frac{dj_1}{dt}\right) - j_1\left(i_1\frac{dj_1}{dt}\right)\left(k_1\frac{di_1}{dt}\right);$$

ou bien, en divisant par $j_1\dfrac{di_1}{dt}$ et posant,

$$p = j_1\frac{dk_1}{dt}, \qquad q = k_1\frac{di_1}{dt}, \qquad r = i_1\frac{dj_1}{dt}$$

ou

$$(\xi) \qquad p = -k_1\frac{dj_1}{dt}, \qquad q = -i_1\frac{dk_1}{dt}, \qquad r = -j_1\frac{di_1}{dt},$$

la direction de l'axe est

$$(\gamma) \qquad \omega = pi_1 + qj_1 + rk_1.$$

On a par (α)

$$\frac{di_1}{dt} = rj_1 - qk_1, \qquad \frac{dj_1}{dt} = pk_1 - ri_1, \qquad \frac{dk_1}{dt} = qi_1 - pj_1,$$

équations qui, exprimées en cartésien, sont les *formules dites de Poisson*. (Elles sont dues à Euler.)

On a d'autre part

$$\frac{d\rho}{dt} = x_1(rj_1 - qk_1) + y_1(pk_1 - ri_1) + z_1(qi_1 - pj_1),$$

c'est-à-dire

$$\frac{d\rho}{dt} = V\omega\rho,$$

formule qui montre bien que, à l'instant t, les vitesses des différents points du solide *sont les mêmes que si le solide tournait à cet instant autour de l'axe* ω *passant par* O *avec une vitesse égale à* $T\omega$.

L'équation (γ) donne l'expression de l'axe de rotation et les équations (β) ses composantes suivant les axes *mobiles*.

Si nous appelons ε_1 la vitesse du point O, nous obtenons la *formule fondamentale* qui donne la vitesse d'un point quelconque du solide

$$(\delta) \qquad \varepsilon = \varepsilon_1 + V\omega\rho.$$

on remarquera que l'on a

$$\frac{di_1}{dt} = V\omega i_1, \qquad \frac{dj_1}{dt} = V\omega j_1, \qquad \frac{dk_1}{dt} = V\omega k_1,$$

et que ω ne dépend nullement du point O choisi.

81. Mouvement absolu et mouvement relatif. — Considérons un système en mouvement et trois axes mobiles auxquels sont rapportés les points du système. Ces points ont un mouvement par rapport à un observateur qui serait entraîné avec ces axes mobiles, et ce mouvement s'appelle un *mouvement relatif*.

D'autre part, le mouvement des axes mobiles par rapport à des axes fixes étant supposé connu, on appelle *mouvement absolu* d'un point du système mobile, le mouvement de ce point par rapport aux axes fixes. Le problème consiste, étant donnés le mouvement relatif du point et le mouvement absolu des axes mobiles, c'est-à-dire leur

mouvement par rapport aux axes fixes, à déterminer le mouvement absolu du point.

Le mouvement que prendrait un point M invariablement fixé aux axes mobiles et entraîné avec eux s'appelle *mouvement d'entraînement* de ce point.

Soit alors P un point quelconque; x, y, z étant ses coordonnées et ρ_r son vecteur dans le système mobile. Soient ρ_a son vecteur par rapport à l'origine fixe et α le vecteur de l'origine mobile par rapport à l'origine fixe. On a (i, j, k étant les axes *mobiles*)

$$\rho_a = \alpha + xi + yj + zk,$$

d'où, par dérivation totale par rapport au temps,

$$\rho'_a = \alpha' + xi' + yj' + zk' + x'i + y'j + z'k,$$

équation qui montre que la vitesse absolue ρ'_a est la somme géométrique de la vitesse relative $(x'i + y'j + z'k)$ et de la vitesse d'entraînement $(\rho'_e = \alpha' + xi' + yj' + zk')$ ou

$$\rho'_a = \rho'_r + \rho'_e.$$

Dérivons une seconde fois par rapport au temps. Il vient

$$\rho''_a = \alpha'' + 2(x'i' + y'j' + z'k') + x''i + y''j + z''k + xi'' + yj'' + zk'',$$

équation qui montre que l'accélération absolue ρ''_a est la somme géométrique de trois termes :

1° L'accélération relative (i, j, k constants)

$$x''i + y''j + z''k;$$

2° L'accélération d'entraînement (x, y, z constants)

$$\alpha'' + xi'' + yj'' + zk'';$$

3° Une accélération dite *accélération complémentaire*

$$2(x'i' + y'j' + z'k').$$

D'où le *théorème de Coriolis* (1835) :

L'accélération absolue est la somme géométrique de l'accélération relative, de l'accélération d'entraînement et de l'accélération complémentaire.

L'accélération complémentaire s'écrit en remplaçant i', j', k' par

leurs valeurs $V\omega i$, $V\omega j$, $V\omega k$, où i, j, k sont les axes *mobiles*.

$$\rho''_r = 2V\omega\rho'_r.$$

Elle *s'annule* lorsque ω est nul (le mouvement des axes mobiles est une *translation*); lorsque $\rho'_r = 0$ (le système est en *repos relatif*) et lorsque la *vitesse relative* est constamment *parallèle* à ω.

82. Mouvement central d'un point. — Supposons que l'accélération d'un point mobile passe constamment par un *point fixe* que nous prenons comme origine. On dit alors que le mouvement du point est un *mouvement central*. Soit R la valeur *scalaire* de l'accélération (variable); on aura donc $\rho'' = R\rho_0$ et par suite

$$V\rho\rho'' = 0,$$

d'où par intégration

$$V\rho\rho' = \gamma,$$

où γ est un vecteur constant. Cette équation exprime que la trajectoire est une *courbe plane* contenue dans un plan perpendiculaire à γ.

Soient r le module de ρ et c celui de γ. On a donc

$$r\,ds\sin\theta = c\,dt,$$

θ étant l'angle du rayon vecteur et de la tangente à la trajectoire $\frac{d\rho}{dt}$. Par suite, en appelant S l'aire balayée par le rayon vecteur, on a

$$dS = \frac{1}{2}c\,dt,$$

expression du *théorème des aires*.

Étudions en particulier le cas classique de l'attraction du point en raison inverse du carré de la distance et soit, en supposant la masse du point égale à l'unité,

$$\rho'' = -\frac{a^2}{r^2}\rho_0 = -\frac{a^2}{r^3}\rho,$$

on a, comme ci-dessus,

$$V\rho\rho' = \gamma.$$

Opérons sur l'équation du mouvement par $V(\quad)\gamma$, il vient

$$V\rho''\gamma = -\frac{a^2}{r^3}V\rho V\rho\rho' = -\frac{a^2}{r^3}(\rho'\rho^2 - \rho S\rho\rho') = a^2\frac{d}{dt}\left(\frac{\rho}{r}\right);$$

d'où, en intégrant,

$$(\alpha)\qquad V\rho'\gamma = a^2(\rho_0 + k\alpha),$$

où k est une constante et α un vecteur unité fixe. Opérons sur cette équation (α) par $S\rho$. Il vient

$$\frac{S\rho\rho'\gamma}{a^2} = \frac{\gamma^2}{a^2} = -\frac{c^2}{a^2} = -r + kS\alpha\rho$$

ou bien, en désignant par θ l'angle de ρ et de α,

$$\frac{c^2}{a^2} = r(1 + k\cos\theta).$$

Posons $\frac{c^2}{a^2} = p$, il vient

$$r(1 + k\cos\theta) = p,$$

équation polaire d'une *conique* ayant un foyer à l'origine. Opérons maintenant sur (α) par $V\gamma$. Il vient

$$\frac{V\gamma V\rho'\gamma}{a^2} = V\gamma\rho_0 - kV\gamma\alpha.$$

Or le premier membre s'écrit

$$\frac{V\gamma V\rho'\gamma}{a^2} = \frac{1}{a^2}(\gamma S\rho'\gamma - \rho'\gamma^2) = -\rho'\frac{\gamma^2}{a^2} = p\rho',$$

on a donc

$$\rho' = -\frac{k}{p}V\alpha\gamma + \frac{1}{p}V\gamma\rho_0,$$

ce qui montre que l'*hodographe* de la trajectoire [c'est-à-dire le lieu obtenu en portant à partir d'une origine fixe des vecteurs égaux aux vecteurs vitesse et joignant leurs extrémités par une courbe continue (Hamilton)] *est un cercle* de rayon $\frac{a^2}{c}$ et dont le centre est au point $-\frac{k}{p}V\alpha\gamma$, car le module du vecteur de direction variable $\frac{1}{p}V\gamma\rho_0$ est constant et égal à $\frac{a^2}{c}$.

Le mouvement étant central, on a $V\rho\rho'' = 0$ et, par suite, ρ'' étant parallèle à la tangente de l'hodographe, on voit que *les tangentes à l'hodographe sont parallèles aux rayons vecteurs de la trajectoire aux points correspondants.*

La loi de l'hodographe circulaire apparaît ici comme une *conséquence* de la loi du carré inverse. Hamilton (*E*, 449) a montré que, réciproquement, aucune autre loi de force centrale ne peut donner lieu à un hodographe circulaire, à moins que l'orbite elle-même soit circulaire et que, de plus, le centre d'accélération soit au centre du

cercle. De sorte que la loi de la nature peut être considérée comme caractérisant et caractérisée par l'hodographe circulaire.

Voici une démonstration de ce principe, qui est à peu près celle que donne Hamilton [*E*, 419, (17)].

On a, par le théorème des aires,

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = c.$$

Soit r_1 le rayon de courbure de l'hodographe. Puisque la tangente à l'hodographe est parallèle à ρ, on a, en appelant v_1 la vitesse d'un point de l'hodographe,

$$r_1 = \frac{ds'}{d\varphi} = \frac{v_1 dt}{c\, dt} r^2 = \frac{r^2}{c} v_1,$$

mais on a

$$\rho'' = -\mathrm{R}\rho_0.$$

D'autre part, la vitesse d'un point de l'hodographe est $\frac{d\rho'}{dt} = \rho''$. Donc on a $v_1 = \mathrm{R}$. D'où

$$\text{rayon de courbure de l'hodographe} = \frac{\text{force } (-\mathrm{R}) \times \text{carré de la vitesse}}{\text{constante des aires}}.$$

La constante des aires ne dépend que des conditions initiales. Donc, pour que l'hodographe soit un cercle ($r_1 = \text{const.}$), il faut que l'on ait

$$\text{force} \times r^2 = \text{const.}$$

Étant obligés de nous limiter sur ce sujet, nous arrêterons là les exemples d'applications mécaniques; mais le lecteur peut voir déjà que les procédés de l'analyse quaternionienne et vectorielle s'y appliquent particulièrement bien et avec une très grande simplicité. Pour achever de se familiariser avec les procédés à employer, nous ne pourrions mieux lui conseiller que de prendre un chapitre complet d'un Traité de Mécanique tel que celui d'Appell ou de Bouasse et de l'étudier en en traduisant les équations vectoriellement. Il pourra se convaincre ainsi que cette analyse est en quelque sorte la langue naturelle de la Mécanique et de la Physique.

Il aura intérêt toutefois à réserver l'étude de chapitres traitant du potentiel ou de l'attraction ou encore de l'équilibre et du mouvement des fluides jusqu'au moment prochain où nous lui aurons présenté les fonctions d'espace et les opérateurs différentiels.

C. — Courbes gauches.

83. Courbes gauches. — Une équation de la forme

$$\rho = \varphi(t),$$

où φ est une fonction vectorielle de la variable scalar t, dépendant de trois vecteurs constants α, β, γ non coplanaires, c'est-à-dire de la forme

$$\rho = \alpha\varphi_1(t) + \beta\varphi_2(t) + \gamma\varphi_3(t),$$

représente évidemment une courbe dans l'espace lorsque la variable t varie, les fonctions φ_1, φ_2, φ_3 sont supposées *scalaires* et d'ailleurs quelconques.

La tangente à la courbe au point t sera parallèle au vecteur

$$\rho' = \varphi'(t) = \alpha\varphi'_1(t) + \beta\varphi'_2(t) + \gamma\varphi'_3(t)$$

et l'équation de la tangente sera

$$\rho = \varphi(t) + x\varphi'(t).$$

Nous supposons dans ce qui suit que la variable scalar t est l'*arc de courbe* s de la courbe compté à partir d'une origine quelconque fixe sur la courbe. On a alors

$$T\rho'_s = 1,$$

car $T\,d\rho = ds$ ou

$$\rho'^2 = -1,$$

d'où

$$S\rho'\rho'' = 0 \qquad \text{ou} \qquad \rho'\rho'' = 0 \text{ en supprimant S},$$

les dérivées étant prises par rapport à s. Cette équation permet de simplifier beaucoup les résultats.

Nous désignerons par θ l'angle de deux tangentes infiniment voisines à la courbe, c'est-à-dire l'*angle de contingence*. La limite du rapport

$$R = \frac{ds}{\theta},$$

lorsque ds tend vers zéro, s'appelle *rayon de courbure* au point M. Nous verrons un peu plus loin la raison de cette dénomination.

Soient P un point de la courbe et ρ son vecteur. Menons par P une droite quelconque

$$\varpi = \rho + x\alpha.$$

La distance du point $P' = \rho + d\rho$ à cette droite est [73, (8)]

$$-\alpha^{-1} V\alpha\, d\rho = -\alpha^{-1} V\alpha\left(\rho' dt + \frac{1}{2}\rho'' dt^2 + \ldots\right).$$

Elle est en général du premier ordre et sera du second si l'on a

$$V\alpha\rho' = 0 \qquad \text{ou} \qquad \alpha \text{ parallèle à } \rho'.$$

On peut par conséquent regarder la tangente comme la droite qui a, au point P, un *contact du premier ordre* avec la courbe. Cette condition la détermine complètement.

Menons par le point P un plan quelconque normal à un vecteur α. La distance du point $P' = \rho + d\rho$ à ce plan a pour expression

$$-\alpha^{-1} S\alpha\, d\rho = -\alpha^{-1} S\alpha\left(\rho' dt + \frac{1}{2}\rho'' dt^2 + \frac{1}{6}\rho''' dt^3 + \ldots\right).$$

Elle est en général du premier ordre. Elle sera du second ordre si l'on a

$$\alpha\rho' = 0,$$

c'est-à-dire si le plan passe par la tangente, et du troisième ordre si l'on a en même temps

$$\alpha\rho'' = 0,$$

c'est-à-dire si

$$\alpha \parallel \rho' \times \rho''.$$

Le plan particulier ainsi déterminé, passant par la tangente et dont la normale est $V\rho'\rho''$, s'appelle *plan osculateur* au point P. Il a en ce point un *contact du second ordre* avec la courbe, condition qui le détermine complètement.

Un cercle étant déterminé par trois points, nous pouvons faire passer un cercle par trois points infiniment voisins de la courbe et cette condition le déterminera. Soient les trois points

$$P = \rho, \qquad P' = \rho + \rho' dt, \qquad P'' = \rho + \rho' dt + \frac{1}{2}\rho'' dt^2.$$

Le plan qui contient ces trois points aura pour équation

$$S(\varpi - \rho)\alpha = 0,$$

et l'on doit avoir

$$S\rho' dt\alpha = 0,$$

$$S\left(\rho' dt + \frac{1}{2}\rho'' dt^2\right)\alpha = 0:$$

d'où

$$\alpha \parallel V\rho'\rho''.$$

Le plan qui contient le cercle en question est donc le *plan osculateur*.

Pour déterminer le centre du cercle, nous remarquons que le rayon du cercle devant être normal à ds à ses deux extrémités, le centre se trouve sur l'intersection de *deux plans normaux* infiniment voisins. Or le plan normal au point P a pour équation

$$S(\varpi - \rho)\rho' = 0;$$

le plan normal au point P′ est

$$S(\varpi - \rho - \rho' dt)(\rho' - \rho'' dt) = 0.$$

On en déduit facilement que l'intersection des deux plans normaux est parallèle à $V\rho'\rho''$, c'est-à-dire *perpendiculaire au plan osculateur*.

Le centre du cercle s'obtiendra en abaissant du point P une perpendiculaire sur l'intersection. En mettant l'origine en P, cette perpendiculaire est

$$xV\rho'V\rho'\rho'' = y\rho'' \qquad (\text{car } S\rho'\rho'' = 0).$$

Cherchons son intersection avec le plan normal en P′, c'est-à-dire

$$S(\varpi - \rho' ds)(\rho' + \rho'' ds) = 0,$$

où

$$S(y\rho'' - \rho' ds)(\rho' + \rho'' ds) = 0.$$

On trouve immédiatement, en appelant C le centre du cercle,

$$\overline{PC} = y\rho'' = -\rho''^{-1} = -\frac{1}{\rho''}.$$

Le centre du cercle, que l'on appelle *cercle osculateur*, est donc

$$\gamma = \rho - \frac{1}{\rho''}.$$

Son rayon est

$$\frac{1}{T\rho''} = \frac{1}{T\dfrac{d\rho'}{ds}} = \frac{ds}{T\,d\rho'} = \frac{ds}{\eta},$$

c'est-à-dire précisément le *rayon de courbure*.

De même, une sphère étant déterminée par quatre points, on appellera *sphère osculatrice* de la courbe au point P la sphère qui passe par le point P et trois autres points infiniment voisins. Soit la sphère

$$(\varpi - \alpha)^2 = -R^2.$$

On écrira les équations

$$(\rho - \alpha)^2 = -R^2,$$
$$(\rho + \rho' ds - \alpha)^2 = -R^2,$$
$$\left(\rho + \rho' ds + \frac{1}{2}\rho'' ds^2 - \alpha\right)^2 = -R^2,$$
$$\left(\rho + \rho' ds + \frac{1}{2}\rho'' ds^2 + \frac{1}{6}\rho''' ds^3 - \alpha\right)^2 = -R^2,$$

équations qui donnent

$$(\rho - \alpha)^2 = -R^2,$$
$$S(\rho - \alpha)\rho' = 0,$$
$$S(\rho - \alpha)\rho'' + 1 = 0,$$
$$S(\rho - \alpha)\rho''' = 0.$$

La seconde et la troisième expriment que le centre de la sphère est sur l'intersection de deux plans normaux infiniment voisins. Nous savons que cette droite est perpendiculaire au plan osculateur. On l'appelle *axe du plan osculateur*.

Le centre de la sphère osculatrice se projette donc au centre du cercle osculateur, c'est-à-dire que celui-ci est tout entier sur la sphère osculatrice.

En développant $\rho - \alpha$ en fonction de $V\rho'\rho''$, $V\rho''\rho'''$, $V\rho'''\rho'$ à l'aide des équations qui précèdent, on trouve sans difficulté pour le centre de la sphère osculatrice [*voir* n° 66, (8)]

$$\alpha = \rho - \frac{V\rho'\rho'''}{S\rho'\rho''\rho'''}.$$

Son rayon est

$$T(\alpha - \rho) = \frac{TV\rho'\rho'''}{\pm S\rho'\rho''\rho'''}.$$

84. Trièdre normal. — En un point d'une courbe gauche, nous voyons que la tangente et la normale au plan osculateur forment avec la normale dirigée vers le centre du cercle osculateur un trièdre trirectangle. Nous appellerons *trièdre normal* le trièdre formé de trois vecteurs unités suivant ces directions définis de la manière suivante :

1° Un vecteur unité ρ' suivant la tangente *dans le sens de la description de la courbe;*

2° Un vecteur unité ρ''_0 dirigé *vers* le centre du cercle osculateur. On appelle cette direction *normale principale*. Nous désignerons ce vecteur unité par la lettre ν;

3° Un vecteur unité perpendiculaire aux deux autres que nous appelons *binormale*, qui est donc perpendiculaire au plan osculateur et qui a pour expression

$$\mu = V\rho'\nu = \rho'\nu \qquad (\text{car } S\rho'\nu = 0),$$

ce qui définit parfaitement sa direction et son sens.

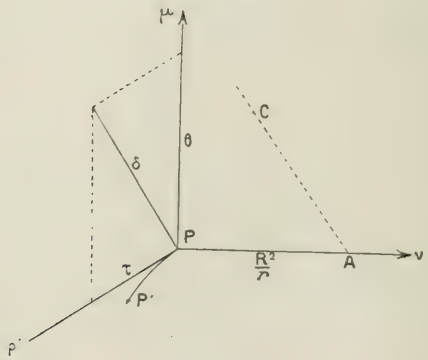
Nous appellerons *torsion* de la courbe le rapport $\frac{\tau}{ds}$ de l'angle de deux plans osculateurs infiniment voisins à l'arc de courbe. L'angle τ s'appelle *angle de torsion*. Il est *positif* lorsqu'un observateur couché sur la tangente avec la tête en ρ' voit le plan osculateur (ou la binormale) tourner dans le *sens direct*. Il est négatif dans le cas contraire.

L'inverse de la torsion $r_1 = \frac{ds}{\tau}$ s'appelle *rayon de torsion*. C'est une quantité algébrique qui a un signe et *nullement*, comme le rayon de courbure, le *rayon d'un certain cercle*, qui serait toujours positif ou sans signe.

85. **Formules de Frenet.** — Considérons le trièdre normal au point P de la courbe et cherchons les différentielles de ρ', μ, ν quand le point P se déplace infiniment peu sur la courbe. On a d'abord

$$d\rho' = \rho'' ds = T\rho'' \rho''_0 ds = \frac{ds}{r}\nu = \theta\nu \text{ (1)}.$$

Fig. 36.



On a ensuite

$$\mu = \rho' \times \nu,$$

d'où

$$d\mu = \rho' \times d\nu + d\rho' \times \nu = \rho' \times d\nu.$$

(1) Dans tout ce qui suit, r représente le rayon de courbure, r_1 le rayon de torsion et R ce que nous appellerons plus loin le rayon de courbure totale.

Donc, $d\mu$ est perpendiculaire à ρ'. Mais $d\mu$ est aussi perpendiculaire à μ, puisque μ est unitaire. Par suite, $d\mu$ est parallèle à ν. On a donc

$$d\mu = p\nu,$$

p étant un scalar. Mais ν étant unitaire, $p = -\tau$ d'après la définition de τ. Donc

$$d\mu = -\tau\nu.$$

On a alors

$$d\nu = d(\mu \times \rho') = d\mu \times \rho' + \mu \times d\rho' = \mu\tau - \theta\rho';$$

d'où les *formules de Frenet* sous forme vectorielle

$$(\mathrm{F}) \qquad \begin{cases} d\rho' = \theta\nu, \\ d\nu = -\theta\rho' + \tau\mu, \\ d\mu = -\tau\nu, \end{cases}$$

on voit que l'on a

$$\mathrm{S}\, d\rho'\, d\nu\, d\mu = 0.$$

On peut amener le trièdre de sa position à une position parallèle à sa position au point P′ voisin de P par une rotation autour d'un axe

$$\mathrm{V}\, d\rho'\, d\nu \parallel \theta\mu + \tau\rho'.$$

Posons

$$\delta = \theta\mu + \tau\rho'$$

et

$$\omega^2 = \theta^2 + \tau^2,$$

nous voyons que nous avons

$$d\rho' = \theta\nu = \delta \times \rho'$$

et que, de même, on a

$$d\nu = -\theta\rho' + \tau\mu = \delta \times \nu$$

et

$$d\mu = -\tau\nu = \delta \times \mu.$$

Par conséquent, δ est l'axe de rotation instantané du trièdre normal, *en grandeur*, *direction et sens*, et la grandeur de la rotation instantanée est $\omega = +\sqrt{\theta^2 + \tau^2}$, c'est-à-dire la quantité appelée par Lancret *courbure totale* de la courbe.

Il est facile de voir quelle est la nature géométrique de l'axe δ. Le plan contenant la binormale et la tangente, c'est-à-dire le plan perpendiculaire à la normale principale au point P et appelé par Lancret *plan rectifiant*, a pour équation

$$\mathrm{S}\, \varpi\nu = 0.$$

Le plan infiniment voisin sera

$$S(\varpi - \rho' ds)(\nu - d\nu) = 0.$$

Leur intersection satisfait à l'équation

$$S\varpi\, d\nu = 0.$$

On a donc

$$\varpi = V\nu\, d\nu = \theta\mu - \tau\rho' = \delta.$$

L'axe instantané est donc la caractéristique du plan rectifiant. On appelle cette droite *droite rectifiante* (Lancret). Elle fait avec la tangente à la courbe au point P un angle ζ :

$$\operatorname{tang}\zeta = \frac{\theta}{\tau} = \frac{r_1}{r} = \frac{\text{rayon de torsion}}{\text{rayon de courbure}}.$$

Le déplacement total du trièdre est la somme des deux termes

$$P\delta + |\rho' ds$$

dont le premier est le bipoint donnant la rotation δ, le second le bivecteur donnant la translation $\rho' ds$. Soit A un point sur la normale principale,

$$A = P + x\nu.$$

L'expression devient, en exprimant P au moyen de A,

$$A\delta - x|\nu \times \delta + |\rho' ds.$$

L'axe du bivecteur, c'est-à-dire la translation, deviendra parallèle à l'axe de rotation, si l'on détermine x de manière que

$$V\delta(-xV\nu\delta + \rho' ds) = 0,$$

ce qui donne

$$x = \frac{\theta\, ds}{\omega^2},$$

ou bien, en posant (Lancret)

$$R = \frac{ds}{\omega} = \text{rayon de courbure totale},$$

on a

$$PA = \frac{R^2}{r}.$$

L'axe du *déplacement hélicoïdal* est alors AC. La vitesse de rotation est ω, la translation est $-\rho'\delta_0\, ds = -\frac{\rho'\delta}{\omega} = \frac{\tau\, ds}{\omega}$.

Le lecteur pourra trouver des développements supplémentaires

dans le Mémoire de M. Fehr : *Application de la méthode vectorielle de Grasmann à la Géométrie infinitésimale* [1], et dans les *Éléments* d'Hamilton qui contiennent d'importantes applications géométriques. On pourra aussi consulter un Mémoire que nous nous proposons de publier prochainement et qui contiendra la théorie systématique des courbes et des surfaces exposée vectoriellement d'une manière élémentaire.

D. — Surfaces courbes.

86. Une équation de la forme

$$F(\rho) = \text{const.}, \tag{1}$$

où F est une fonction *scalar*, représente en général une surface, car cette équation assujettit ρ à une seule condition et, par suite, nous aurons une relation entre les trois coordonnées x, y, z, du point $P(\rho)$, c'est-à-dire l'équation d'une surface. De même une équation

$$\rho = \varphi(u, v), \tag{2}$$

où φ est une fonction *vectorielle*, et u et v deux paramètres variables, représente, quand on fait varier l'un des paramètres en laissant l'autre constant, deux systèmes de courbes qui engendreront en général une surface.

C'est ainsi que l'équation de la tangente à une courbe gauche

$$\rho = \varphi(t) + x\varphi'(t)$$

représente, quand on fait varier *à la fois* x et t, *la surface développable* engendrée par ces droites. Les paramètres u et v de l'équation (2) peuvent être considérés comme les coordonnées curvilignes d'un point de la surface.

87. Directions conjuguées (Dupin). — Soient P un point de la surface et (Q) le plan tangent en ce point. (Nous supposons toujours que le point P est un point ordinaire, c'est-à-dire que le plan tangent y est unique et déterminé.) Supposons que le point P se déplace sur une courbe C tracée sur la surface et soit P′ une position infiniment voisine de ce point sur la courbe C. Soit (Q′) le plan

---

[1] Deuxième édition. Genève, Librairie Georg et Cie. 1907.

tangent à la surface au point P′. Les deux plans (Q) et (Q′) se coupent alors suivant une droite Δ qui est la caractéristique du plan tangent en P. Les deux directions de la tangente à la courbe C au point P et de la droite Δ sont dites *directions conjuguées* (¹).

Nous allons montrer, en effet, que la droite Δ passe par le point P et que, d'autre part, si le point P se déplace dans la direction de la droite Δ, la nouvelle caractéristique du plan tangent est la tangente à la courbe C au point P, ce qui justifie le nom de *droites conjuguées*.

L'origine étant placée au point P et n étant la normale à la surface en ce point, on a pour tout point infiniment voisin de la surface l'équation $S n\, d\rho = 0$.

Les plans tangents en P et en $P' = d\rho_1$ ont pour équations

$$S \varpi n = 0,$$
$$S(\varpi - d\rho_1)(n + dn_1) = 0.$$

La deuxième équation s'écrit, en tenant compte de la première et de $S n\, d\rho_1 = 0$,

$$S \varpi\, dn_1 = 0.$$

On voit que l'intersection des deux plans, c'est-à-dire la droite Δ, passe par l'origine; sa direction est

$$d\rho_2 = V n\, dn_1,$$

c'est-à-dire qu'elle est parallèle à la perpendiculaire commune aux deux normales infiniment voisines de la courbe C. On a donc

$$V\, d\rho_2 V n\, dn_1 = 0 \qquad \text{ou} \qquad S\, d\rho_2\, dn_1 = 0,$$

c'est-à-dire que la direction conjuguée de $d\rho_1$ est perpendiculaire à l'image sphérique de $d\rho_1$. Cette équation s'écrit

$$dx_1 dx_2 S i \frac{\partial n}{\partial x} + dy_1 dy_2 S j \frac{\partial n}{\partial y} + dz_1 dz_2 S k \frac{\partial n}{\partial z} = 0,$$

et il est clair que l'on aurait la même équation si l'on cherchait la direction conjuguée de $d\rho_2 = i\, dx_2 + j\, dy_2 + k\, dz_2$. Donc $d\rho_1$ et $d\rho_2$ sont réciproquement conjuguées l'une à l'autre.

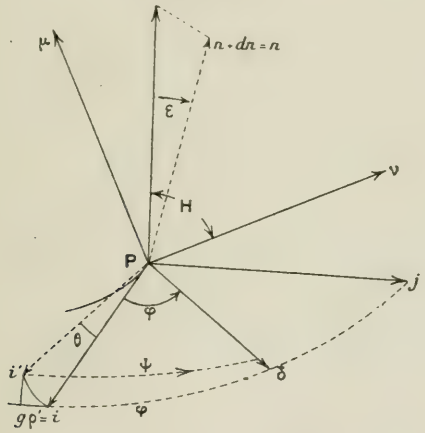
88. Trièdre caractéristique. — La grande facilité que donne la considération du trièdre de Frenet, pour l'étude des courbes dans l'espace, nous suggère l'idée d'employer un trièdre analogue pour

(¹) Dupin, *Développements de Géométrie*.

l'étude des courbes tracées sur une surface. Nous le définirons de la manière suivante :

Nous prendrons d'abord un vecteur unité tangent à la courbe dans la direction de la description de celle-ci et comme deuxième vecteur un vecteur normal à la surface et dirigé dans le sens de la *concavité* de la section normale suivant la tangente à la courbe. Nous désignerons ce vecteur unité par n. Nous désignerons alors par j un troisième vecteur unité situé dans le plan tangent et tel que le sens ρ', j, n soit à droite. δ sera un vecteur unité dirigé suivant la conjuguée de ρ' (caractéristique du plan tangent) et situé du même côté que j par rapport à la droite qui porte ρ'. Le trièdre de Frenet ρ', ν, μ sera défini, par rapport au trièdre caractéristique (*fig.* 37), par l'angle H de la normale à la surface avec le plan osculateur à la courbe.

Fig. 37.



Désignons momentanément par i, pour la facilité de l'écriture, le vecteur ρ' et supposons que le point P se déplace infiniment peu sur la courbe. Le trièdre caractéristique deviendra i', j', n', et en désignant par ε l'angle de deux normales infiniment voisines à la surface quand on se déplace suivant la courbe C et par ψ l'angle que fait i' dans sa nouvelle position avec le vecteur δ, on pourra appliquer les formules du n° **79** dans lesquelles on fera $\theta = -\varepsilon$, parce que l'angle ε est rétrograde. Tenant compte que ε est infiniment petit et que, par suite, on peut remplacer $\cos\varepsilon$ par 1 et $\sin\varepsilon$ par ε, ces formules deviennent

$$i' = i\cos(\varphi - \psi) + j\sin(\varphi - \psi) + k\sin\psi\,\varepsilon,$$
$$j' = i\sin(\psi - \varphi) + j\cos(\varphi - \psi) - k\,\varepsilon\cos\psi,$$
$$k' = -i\,\varepsilon\sin\varphi + j\,\varepsilon\cos\varphi - k.$$

Mais $\varphi - \psi$ est infiniment petit. Posons

$$\varphi - \psi = g$$

et remplaçons k par n et i par φ'. Il vient, en remarquant que $\cos g = 1$, $\sin g = g$, $\sin\psi = \sin\varphi$:

$$(\mathrm{L})\quad \begin{cases} d\varphi' = -gj - n\varepsilon\sin\varphi, \\ dj = -g\varphi' - n\varepsilon\cos\varphi, \\ dn = \varepsilon(-\varphi'\sin\varphi + j\cos\varphi). \end{cases}$$

formules simples et qui facilitent singulièrement l'étude des courbes tracées sur les surfaces.

L'angle ε a une définition géométrique connue qui est l'angle de deux normales infiniment voisines de la surface. Nous allons voir que l'angle g a également une signification géométrique importante. Si nous projetons l'angle ψ et l'angle θ sur le plan tangent, nous voyons, en tenant compte du sens des angles et remarquant que l'angle de ψ et de φ est infiniment petit et que H est égal à l'angle en i',

$$\psi = -\theta\sin\mathrm{H} - \varphi$$

ou

$$g = \varphi - \psi = \theta\sin\mathrm{H}.$$

L'angle g des formules (L) est donc la *projection de l'angle de contingence* de la courbe *sur le plan tangent* à la surface. On l'appelle *angle de contingence géodésique*.

Identifions les formules (L) avec les formules de Frenet, nous aurons d'abord

$$d\varphi' = gj - n\varepsilon\sin\varphi = \theta\sin\mathrm{H}.j - n\varepsilon\sin\varphi = \theta\nu = \theta(n\cos\mathrm{H} - j\sin\mathrm{H}),$$

d'où

$$\varepsilon\cos\varphi = \theta\cos\mathrm{H}.$$

Si nous identifions, de même, la troisième formule (F),

$$d\mu = -\tau\nu$$

en remarquant que

$$\mu = n\sin\mathrm{H} - j\cos\mathrm{H},$$

nous aurons

$$dn\sin\mathrm{H} - dj\cos\mathrm{H} - (n\cos\mathrm{H} - j\sin\mathrm{H})\,d\mathrm{H} = -\tau(n\cos\mathrm{H} - j\sin\mathrm{H}),$$

et en remplaçant dn et dj par leurs valeurs (L), on trouve

$$\varepsilon\cos\varphi = \tau + d\mathrm{H}.$$

On a donc les trois formules

$$(\mathrm{M})\qquad \left\{\begin{aligned} g &= \theta \sin \mathrm{H}, \\ \varepsilon \sin \varphi &= \theta \cos \mathrm{H}, \\ -\varepsilon \cos \varphi &= \tau + d\mathrm{H}, \end{aligned}\right.$$

qui rattachent les formules (L) aux formules (F).

La seconde formule (M), en la mettant sous la forme

$$\frac{\varepsilon}{ds} \sin \varphi = \frac{\theta}{ds} \cos \mathrm{H},$$

montre que, pour toute section plane passant par une tangente déterminée à la surface, comme ε, ds et φ sont constants, le second membre

$$\frac{\theta}{ds} \cos \mathrm{H} = \frac{\cos \mathrm{H}}{\mathrm{R}},$$

où R est le rayon de courbure de la section, est *invariant*, ce qui exprime le théorème de Meusnier.

La troisième équation (M) donne de même

$$-\frac{\varepsilon}{ds} \cos \varphi = \frac{\tau}{ds} + \frac{d\mathrm{H}}{ds},$$

ce qui montre que, pour toute section plane faite dans les mêmes conditions, la quantité

$$\frac{1}{r_1} + \frac{d\mathrm{H}}{ds} \qquad (r_1 = \text{rayon de torsion de la section})$$

est un *invariant*. C'est un théorème d'Ossian Bonnet.

89. Les applications des formules (L) sont très nombreuses et très intéressantes, comme l'on doit s'y attendre, puisqu'elles introduisent immédiatement les éléments géométriques absolus de la courbe tracée sur une surface. Il ne nous est possible d'en donner ici qu'une idée première.

Il existe en chaque point de la surface deux directions conjuguées *rectangulaires* entre elles. Nous les obtiendrons en faisant $\varphi = \frac{\pi}{2}$, ce qui donne au moyen de (M)

$$(\mathrm{M}'_c)\qquad \left\{\begin{aligned} g &= \theta \sin \mathrm{H}, \\ \varepsilon &= \theta \cos \mathrm{H}, \\ \tau + d\mathrm{H} &= 0. \end{aligned}\right.$$

D'autre part, les équations (L) deviennent

$$(\mathrm{L}'_c)\qquad \begin{cases} d\rho' = gj + n\varepsilon, \\ dj = -g\rho', \\ dn = -\varepsilon\rho'. \end{cases}$$

On tire de la dernière

$$\mathrm{V}\, dn\, d\rho = 0$$

qui est, par conséquent, une équation différentielle vectorielle des lignes de courbure. On peut en déduire une équation différentielle scalar, car, cette équation exprimant que dn est parallèle à $d\rho$, il en résulte que $\mathrm{V}\, n\, dn$ est perpendiculaire à $d\rho$ et, par suite, on a l'*équation différentielle scalar des lignes de courbure*

$$\mathrm{S}\, n\, dn\, d\rho = 0.$$

Si l'on opère sur la première équation (L) par $\mathrm{S}j$, il vient

$$\mathrm{S}j\, d\rho' = -g.$$

Remplaçons j par $\mathrm{V}\, n\rho'$, on a

$$g = -\mathrm{S}\, n\rho'\, d\rho' = -\frac{\mathrm{S}\, n\, d\rho\, d'\rho}{ds^2} = \frac{\mathrm{N}}{ds^2}$$

en posant

$$\mathrm{N} = -\mathrm{S}\, n\, d\rho\, d^2\rho.$$

Opérant de même sur la troisième équation (L), d'abord par $\mathrm{S}\rho'$, puis par $\mathrm{S}j$, on obtient

$$\varepsilon \sin\varphi = \mathrm{S}\rho'\, dn = \frac{\mathrm{S}\, dn\, d\rho}{ds} = \frac{\mathrm{L}}{ds}$$

et

$$\varepsilon \cos\varphi = \mathrm{S}\, n\, dn\rho' = \frac{\mathrm{S}\, n\, dn\, d\rho}{ds} = -\frac{\mathrm{M}}{ds};$$

en posant

$$\mathrm{L} = \mathrm{S}\, dn\, d\rho, \qquad \mathrm{M} = -\mathrm{S}\, n\, dn\, d\rho.$$

on a donc, généralement,

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{\mathrm{L}^2 - \mathrm{M}^2}}{ds}, \qquad \operatorname{tang}\varphi = -\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{M}}$$

Les équations (M) donnent également

$$\operatorname{tang}\mathrm{H} = \frac{g}{\varepsilon \sin\varphi} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{L}\, ds}.$$

Ces valeurs sont importantes dans la théorie des courbes.

Dans le cas des lignes de courbure, on a

$$M = 0,$$

par suite

$$\varepsilon = \frac{L}{ds}, \qquad \operatorname{tang} H = \frac{N}{L\,ds}.$$

90. Lignes asymptotiques. — On appelle *lignes asymptotiques* d'une surface, celles dont la tangente est à elle-même sa propre conjuguée. On a donc, pour ces lignes $\varphi = 0$, ce qui donne les deux groupes d'équations

$$(L_a) \qquad \begin{cases} d\rho' = gj, \\ dj = -g\rho' - n\varepsilon, \\ dn = \varepsilon j; \end{cases}$$

$$(M_a) \qquad \begin{cases} g = \theta \sin H, \\ \varepsilon = \theta \cos H, \\ -\varepsilon = \tau + dH. \end{cases}$$

Les formules (L_a) sont identiques aux formules de Frenet dans lesquelles on aurait $\tau = -\varepsilon$. On voit que le *trièdre normal d'une asymptotique* est formé par la *tangente* à la courbe, la *normale à cette tangente* située dans le plan tangent et la *normale à la surface*. La courbure d'une ligne asymptotique est donc égale à sa courbure géodésique, et le plan osculateur de la courbe n'est autre que le plan tangent à la surface. L'élément de courbe d'une ligne asymptotique est la plus courte distance des normales à la surface à ses extrémités.

L'équation différentielle de ces lignes est

$$S\,dn\,d\rho = 0.$$

La troisième équation montre que

$$\tau = -\varepsilon,$$

puisque $H = \frac{\pi}{2} = \text{const}$. La torsion est égale à l'angle de deux normales infiniment voisines.

On verrait immédiatement que si deux lignes asymptotiques se coupent *rectangulairement* en un point, les arêtes du trièdre normal de la seconde étant

$$i' = j, \qquad j' = -i, \qquad n' = n.$$

on a, pour cette deuxième courbe,

$$\begin{aligned} di' &= j'\theta', \\ dj' &= -i'\theta + n'\tau', \\ dn' &= -j'\tau'; \end{aligned}$$

d'où, en comparant avec (M_a),

$$\theta = \theta', \qquad \tau = \tau' = 0.$$

Donc, en ce point, *les courbes asymptotiques ont même courbure et une torsion nulle.*

Il en résulte que, *si une surface possède un réseau de courbes asymptotiques orthogonales, ces courbes sont planes et ont même courbure en chaque point de la surface.*

91. **Lignes géodésiques.** — Une ligne géodésique d'une surface est une ligne qui jouit de la propriété qu'en chacun de ses points le plan osculateur est normal à la surface.

On a donc les équations (où $H = 0$, $dH = 0$)

$$(L_g) \qquad \left\{ \begin{aligned} d\varphi' &= n\theta, \\ dj &= n\tau, \\ dn &= -\theta\varphi' - j\tau; \end{aligned} \right.$$

$$(M_g) \qquad \left\{ \begin{aligned} g &= 0, \\ \varepsilon \sin\varphi &= \theta, \\ \tau &= -\varepsilon\cos\varphi; \end{aligned} \right.$$

on voit que la courbure géodésique d'une ligne géodésique est nulle en chaque point ($g = 0$).

Les équations (L_g) montrent que le trièdre normal d'une géodésique est formé par la *tangente* à la courbe, la *normale à la surface* (qui est la normale principale) et une droite du plan tangent perpendiculaire à la tangente (qui est la binormale).

Les équations (M_g) montrent alors que l'angle φ est donné par

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\theta}{\tau} = \operatorname{tang}\zeta,$$

en tenant compte que dans (L_g) le signe de j doit être changé pour obtenir les formules exactes de Frenet. Donc :

La *direction conjuguée* de la tangente à une géodésique est la *rectifiante* de cette courbe.

Le plan rectifiant de la courbe géodésique est le plan tangent à la surface lui-même.

On voit immédiatement, par (L_g), que

$$S n\, d\rho\, d'\rho = -N = 0$$

est *l'équation différentielle scalaire des géodésiques.*

On voit aussi, par (M_g), que si une courbe géodésique est plane, on a $\tau = 0$ et, par suite, $\varphi = \frac{\pi}{2}$. D'où le théorème :

Toute ligne géodésique plane est en même temps ligne de courbure.

La réciproque *n'est pas vraie* nécessairement comme on le verra aisément.

Si une ligne est à la fois asymptotique et géodésique, on a, par (M_g), $\theta = 0$ puisque $\varphi = 0$; donc :

Une ligne qui est à la fois asymptotique et géodésique est une droite. Nous renvoyons à ce sujet à notre Mémoire et aux Ouvrages déjà cités.

EXERCICES ET NOTES SUR LE CHAPITRE VIII.

V. — La ligne droite, le plan et la sphère.

92. Nous n'ajouterons que peu de chose aux exemples que nous avons déjà donnés dans le Chapitre VIII lui-même, en ce qui concerne la ligne droite, le plan et la sphère, car les exemples caractéristiques traités en cet endroit permettent de se rendre compte de la méthode à employer dans chaque cas.

Voici un exemple curieux de l'interprétation des caractéristiques fonctionnelles du calcul donné par Hamilton [1].

a. Soient O, A, B, P quatre points de l'espace dont les trois premiers sont donnés et non collinéaires. On pose

$$OA = \alpha, \qquad OB = \beta, \qquad OP = \rho$$

et l'on considère l'équation

$$F\frac{\rho}{\alpha} = F\frac{\beta}{\alpha}.$$

---

[1] *Bishop Law's Premium Examination*, 1866. — *Cf.* Tait. *Exercices* proposés à la fin de son Traité.

Si la caractéristique F est remplacée par S, le lieu de P est un plan. Quel est ce plan? (Plan perpendiculaire à α mené par l'extrémité de β.)

b. Si l'on remplace F par V, le lieu est une droite indéfinie. Quelle droite? (Parallèle à α menée par B.)

c. Si l'on remplace F par K, le lieu de P est un point. Quel point? (Symétrique de B par rapport à OA.)

d. Si F = U, le lieu est un rayon ou demi-droite. Quel rayon? (Rayon indéfini OB.)

e. Si F = T, le lieu est une sphère. Quelle sphère? (Sphère ayant son centre en O et OB comme rayon.)

f. Si F = TV, le lieu est un cylindre de révolution. Quel cylindre? (Cylindre de révolution autour de OA et passant par B.)

g. Si F = TVU, le lieu est un cône de révolution. Quel est ce cône? (Cône engendré par la rotation de OB autour de OA.)

h. Si F = SU, le lieu est une nappe d'un cône? Quelle nappe et quel cône? (Nappe du cône précédent décrite par OB.)

i. Si F = VU, le lieu est composé de deux rayons. Quels rayons? (Rayon OB et son symétrique par rapport à un plan mené par O perpendiculairement à α.)

93. **Variation d'un segment mobile** [1]. — I. Considérons un segment de droite PP′ porté par la droite mobile Δ. Soient α son vecteur unité directeur, u la longueur PP′, et S et S′ les trajectoires des points P et P′, Σ celle de l'extrémité de OM sur la sphère unité. Nous avons, en appelant ρ et ρ' les vecteurs de P et P′,

$$\rho' = \rho + u\alpha.$$

Nous supposons que ρ, u, α sont des fonctions d'un seul paramètre t. Par différentiation, on obtient

$$d\rho' = d\rho + u\,d\alpha + \alpha\,du.$$

Opérons successivement par $S\alpha$ et $S\,d\alpha$, nous obtenons, en appelant ds, ds' les éléments d'arc de S et S′ dans le sens du déplacement, θ et θ' les angles des tangentes à ces axes avec la droite Δ, et ε, ε_1 les

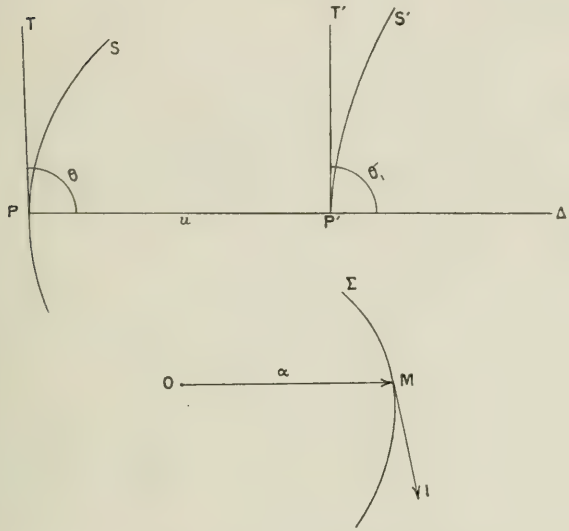
---

[1] W. de Tannenberg. *Leçons nouvelles sur les applications géométriques du calcul différentiel*. Paris, Hermann, 1899.

angles des tangentes PT, PT′ avec la tangente MI à la trajectoire de M, et $d\sigma$ l'élément d'arc de cette dernière courbe :

$$du = ds' \cos\theta' - ds \cos\theta,$$
$$u\, d\sigma = ds' \cos\varepsilon_1 - ds \cos\varepsilon.$$

Fig. 38.



Si nous éliminons $d\alpha$ et du en opérant par $S\alpha\, d\alpha$, nous obtenons

$$S\alpha\, d\alpha\, d\rho' = S\alpha\, d\alpha\, d\rho,$$

ce que l'on peut écrire

$$I\, ds^2 = I'\, ds'^2$$

en posant

$$I = \begin{vmatrix} a & \frac{\partial a}{\partial s} & \frac{dx}{ds} \\ b & \frac{\partial b}{\partial s} & \frac{dy}{ds} \\ c & \frac{\partial c}{\partial s} & \frac{dz}{ds} \end{vmatrix}, \qquad I' = \begin{vmatrix} a & \frac{da}{ds'} & \frac{dx'}{ds'} \\ b & \frac{db}{ds'} & \frac{dy'}{ds'} \\ c & \frac{dc}{ds'} & \frac{dz'}{ds'} \end{vmatrix},$$

où a, b, c sont les cosinus directeurs de la droite Δ, où x, y, z, x', y', z' sont respectivement les coordonnées des points P et P′.

II. *Soient* A, B, C *trois points fixes dans un plan. Si l'on fait passer par* A, B, C *trois côtés d'un carré variable, le quatrième côté du carré passe par un point fixe.*

Soient α et β les vecteurs de A et B en prenant C comme origine et λ un vecteur unité suivant la direction arbitraire des côtés passant par A et B. On aura, en écrivant que $\overline{CD} = \overline{EF}$,

$$CD^2 = (\alpha - \beta)^2 - S^2(\beta - \alpha)\lambda,$$

ou bien, puisque $\lambda^2 = -1$,

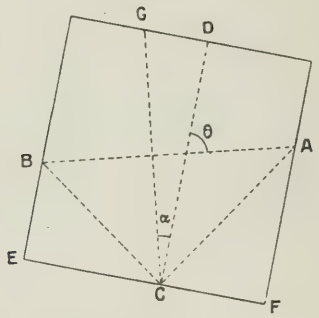
$$\overline{CD}^2 = (\alpha - \beta)\lambda^2 - S^2(\alpha - \beta)\lambda = -V^2(\alpha - \beta)\lambda;$$

d'où

$$CD = T\,V(\alpha - \beta)\lambda = \overline{AB}\sin\theta = \overline{AB}\cos\alpha$$

en menant CG perpendiculaire à AB. Donc $\frac{CD}{\cos\alpha}$ ou CG est constant

Fig. 39.



et le point G est fixe. La démonstration géométrique CG = AB est d'ailleurs évidente.

On remarquera que cette construction donne la solution du problème suivant : *Étant donnés quatre points dans un plan, construire un carré dont les côtés passent par ces points.*

III. *Trouver les rayons des sphères tangentes aux quatre plans*

$$S\alpha\rho = 0, \qquad S\beta\rho = 0, \qquad S\gamma\rho = 0, \qquad S\delta\rho = 1.$$

Soit λ le centre d'une des sphères. On écrit que les distances du point λ aux quatre plans sont égales à R. Où

$$\alpha^{-2}S^2\alpha\lambda = \beta^{-2}S^2\beta\lambda = \gamma^{-2}S^2\gamma\lambda = \delta^{-2}S^2\delta(\delta^{-1} - \lambda) = -R^2;$$

d'où, en appelant a, b, c, d les modules de α, β, γ, δ,

$$S\alpha\lambda = \pm aR, \qquad S\beta\lambda = \pm bR, \qquad S\gamma\lambda = \pm cR, \qquad S\delta\lambda = 1 \pm dR,$$

et il suffit d'éliminer λ entre ces quatre équations pour obtenir l'équation en R. On emploiera l'équation

$$\lambda S\alpha\beta\gamma = V\alpha\beta S\gamma\lambda + \ldots$$

et l'on opérera sur celle-ci par $S\delta$ après avoir remplacé les scalars par leurs valeurs.

B. — Applications cinématiques.

94. Mouvement d'une figure plane dans son plan. 1. Soient P et Q deux points de la figure dont les vecteurs sont ρ et σ. On a (le point placé sur une lettre variable indiquant suivant la notation de Newton la dérivée totale par rapport au *temps*)

$$\dot{\rho} = \dot{\sigma} + V\omega(\rho - \sigma).$$

Mais $\dot{\rho}$ est dans le plan et l'on peut écrire

$$\dot{\rho} = \dot{\sigma} + q\, i(\rho - \sigma), \tag{1}$$

i étant un vecteur unité constant perpendiculaire au plan et q un nombre réel. On en déduit

$$\rho + \frac{1}{q} i\dot{\rho} = \sigma + \frac{1}{q} i\dot{\sigma} = \gamma,$$

γ étant un vecteur constant indépendant du point P. Par suite,

$$\dot{\rho} = q\, i(\rho - \gamma), \tag{2}$$

équation qui montre que la vitesse d'un point quelconque de la figure est normale au rayon vecteur qui joint ce point P à un point fixe $C(\gamma)$ appelé *centre instantané de rotation;* γ dépend de t, mais non du point P.

La grandeur de la vitesse est égale à la longueur du rayon vecteur multipliée par une constante q que l'on appelle *vitesse angulaire à l'instant t.*

On obtient des résultats analogues pour les accélérations en dérivant l'équation (1) par rapport au temps t :

$$\ddot{\rho} = \ddot{\sigma} + \dot{q}\, i(\rho - \sigma) + q\, i(\dot{\rho} - \dot{\sigma}).$$

Remplaçons $\dot{\rho} - \dot{\sigma}$ par sa valeur, il vient

$$\ddot{\rho} = \ddot{\sigma} + (\dot{q}i - q^2)(\rho - \sigma),$$

$\dot{q}i - q^2$ est un quaternion dont l'axe est perpendiculaire au plan. Désignons-le par ϖ. On aura

$$\ddot{\rho} = \ddot{\sigma} + \varpi(\rho - \sigma):$$

d'où l'on tire des conclusions analogues à celles que nous avons déduites de (1). On a, en effet,

$$\rho - \varpi^{-1}\ddot{\rho} = \sigma - \varpi^{-1}\ddot{\sigma} = \alpha \qquad \text{ou} \qquad \ddot{\rho} = \varpi(\rho - \alpha),$$

où α est un vecteur constant qui dépend de t, mais non de P. Le point $A(\alpha)$ s'appelle *centre des accélérations* [1]. Mais ici $\ddot{\rho}$ n'est pas perpendiculaire au vecteur AP. L'angle de AP et de $\ddot{\rho}$ est constant pour tous les points de la figure (c'est l'angle du quaternion ϖ). En supposant, comme l'on peut toujours le faire dans l'étude géométrique d'un déplacement, que la vitesse angulaire q est constante, on a $q' = 0$ et ϖ se réunit à $-q^2$. On obtient ainsi un nouveau point $G(\alpha_1)$ qu'on appelle *centre géométrique des accélérations*.

On a, en supposant $q' = 0$,

$$\ddot{\rho} = -q^2(\rho - \alpha).$$

D'autre part, en différentiant (2), on a

$$\ddot{\rho} = q\,i(\dot{\rho} - \dot{\gamma}).$$

Égalant ces valeurs de $\ddot{\rho}$ et tenant compte de (2), il vient

$$\alpha_1 = \gamma - \frac{1}{q}\,i\dot{\gamma}.$$

On voit que G est sur la normale au lieu du point C à une distance égale à $-\dfrac{T\dot{\gamma}}{q}$.

L'accélération est alors $\ddot{\rho} = q^2(\alpha_1 - \rho)$ ou parallèle à PG.

II. *Exprimer les composantes p, q, r de l'axe instantané en fonction des angles d'Euler φ, ψ, θ (cf.* n° 79).

L'axe instantané étant $\Omega = (pi' + qj' + rk')\,dt$ peut s'écrire aussi

$$(k\,d\varphi + k'\,d\psi + \delta\,d\theta) = (k\varphi' + k'\psi' + \delta\theta')\,dt.$$

---

[1] Si $T\rho' = \text{const.}$, on a $T(\rho - \alpha) = C$. Les points qui à un instant donné ont même accélération sont donc sur un cercle, ayant pour centre le point γ.

Exprimant δ et k en fonction de k' et i', j', c'est-à-dire

$$k = \delta^{\theta} k', \qquad \delta = k'^{\psi} i'$$

et égalant les coefficients de i', j', k' dans les deux expressions, on trouve

$$\begin{aligned} p &= \dot\theta \cos\psi - \dot\varphi \sin\theta \sin\psi, \\ q &= \dot\theta \sin\psi + \dot\varphi \sin\theta \cos\psi, \\ r &= \dot\varphi \cos\theta + \dot\psi. \end{aligned}$$

Si l'on veut obtenir les composantes p_1, q_1, r_1 par rapport aux axes fixes, on écrira, de même,

$$p_1 i + q_1 j + r_1 k = k\dot\varphi + k'\dot\psi + \delta\dot\theta,$$

et l'on exprime k' et δ au moyen de i, j, k. On trouvera

$$\begin{aligned} p_1 &= \dot\theta \cos\varphi + \dot\psi \sin\theta \sin\varphi, \\ q_1 &= \dot\theta \sin\varphi + \dot\psi \sin\theta \cos\varphi, \\ r_1 &= \dot\varphi + \dot\psi \cos\theta. \end{aligned}$$

III. *Soient q le quaternion qui amène le trièdre $Oijk$ dans la position $Oi'j'k'$ et ε l'axe instantané de rotation. Montrer que l'on a l'équation (où l'on suppose $Tq = 1$)*

$$2\dot q = \varepsilon q \qquad \text{(Tait, 356).}$$

Un vecteur quelconque ρ devient en effet par la rotation

$$\varpi = q\rho q^{-1};$$

d'où, par différentiation par rapport au temps (où l'on doit regarder ρ comme constant),

$$\begin{aligned} \dot\varpi &= \dot q \rho q^{-1} - q\rho q^{-1}\dot q q^{-1} = \dot q q^{-1}.q\rho q^{-1} - q\rho q^{-1}.\dot q q^{-1} \\ &= 2V.V(\dot q q^{-1}).q\rho q^{-1} = 2V.V(\dot q q^{-1}).\varpi. \end{aligned}$$

Mais $\dot\varpi = V\varepsilon\varpi$. D'où

$$\varepsilon = 2V\dot q q^{-1}.$$

Si q est unitaire, on a

$$V\dot q q^{-1} = \dot q q^{-1}.$$

D'où résulte la proposition énoncée.

IV. *Composer trois rotations des angles $2\varepsilon_1$, $2\varepsilon_2$, $2\varepsilon_3$ autour de trois axes rectangulaires concourants.*

L'opération de la rotation s'obtient au moyen du quaternion $q = k^{\varepsilon_3} j^{\varepsilon_2} i^{\varepsilon_1}$ ou

$$q = (\cos\varepsilon_3 + k\sin\varepsilon_3)(\cos\varepsilon_2 + j\sin\varepsilon_2)(\cos\varepsilon_1 + i\sin\varepsilon_1),$$

dont le calcul est immédiat. L'opérateur est alors $q(\quad)q^{-1}$.

Remarque. — Dans le cas de *rotations infiniment petites*, le quaternion se réduit à

$$q = 1 + i\varepsilon_1 + j\varepsilon_2 + k\varepsilon_3.$$

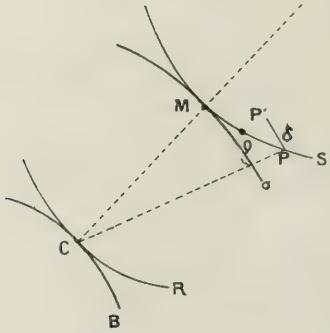
Cette remarque permet souvent de simplifier les calculs.

V. *Montrer que les points de contact d'une courbe mobile dans son plan* (mais *indéformable*) *avec son enveloppe sont les pieds des normales abaissées du centre instantané de rotation sur la courbe mobile* (Chasles, 1829).

Soit S une courbe plane tracée dans le plan (P), elle a pour équation $\rho = \varphi(u)$ et l'on obtient les différents points de la courbe en faisant varier u. Supposons que la courbe soit mobile dans le plan (P) en restant indéformable.

Deux positions successives de la courbe s'obtiendront au moyen d'une rotation infinitésimale autour du centre instantané C, et si nous désignons par $\delta\rho$ la variation infiniment petite de ρ, le point P′ infini-

Fig. 40.



ment voisin de P dans la position voisine de la courbe (*fig.* 40) sera donné par l'équation (cf. *Exercices*, n° 94, 1)

$$P' = P + \dot{P}\,dt = P + qi\,dt(P - C).$$

D'autre part, si le point P se déplace sur la courbe S primitive, son déplacement sera

$$\overline{PQ} = d\rho = \frac{\partial\rho}{\partial u}\,du.$$

Les points P' et Q coïncideront, c'est-à-dire qu'on obtiendra les points de rencontre de S avec sa position infiniment voisine en écrivant

$$\frac{\partial\rho}{\partial u}\,du = qi\,dt(P - C)$$

ou bien, en éliminant du et dt,

$$0 = V\,q\,i(P - C)\frac{\partial\rho}{\partial u} = V(P - C).i\frac{\partial\rho}{\partial u},$$

équation qui exprime que la normale $i\frac{\partial\rho}{\partial u}$ au point commun M passe par le point C. D'où le théorème de Chasles.

VI. *Déterminer les composantes de l'accélération d'un point mobile dans un plan suivant le rayon vecteur et suivant la perpendiculaire à ce rayon.*

On peut écrire en coordonnées polaires

$$\rho = ri^{\varphi}\alpha,$$

où α est un vecteur unité fixe du plan.

Les composantes de la vitesse sont obtenues en différentiant ρ. On a, pour la valeur vectorielle de la vitesse,

$$\dot{\rho} = \dot{r}i^{\varphi}\alpha + ri^{\varphi+1}\alpha\dot{\varphi}.$$

Les composantes de la vitesse sont donc :

Suivant le rayon vecteur $= \dot{r} = \frac{dr}{dt}$;

Suivant la perpendiculaire au rayon vecteur $= r\dot{\varphi} = r\frac{d\varphi}{dt}$.

L'accélération a pour valeur

$$\begin{aligned} w = \ddot{\rho} &= \ddot{r}i^{\varphi}\alpha + 2\dot{r}i^{\varphi+1}\alpha\dot{\varphi} + ri^{\varphi+2}\alpha\dot{\varphi}^2 + ri^{\varphi+1}\alpha\ddot{\varphi} \\ &= i^{\varphi}\alpha\left[\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right] + i^{\varphi+1}\alpha\left[2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right], \end{aligned}$$

ce qui donne, pour les composantes cherchées,

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2$$

et

$$2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = \frac{1}{r}\frac{d(r^2\dot{\varphi})}{dt}.$$

C. — Courbes gauches.

95. I. *Condition pour qu'une droite mobile engendre une surface développable.*

Nous pouvons considérer la droite Δ comme une émanante de la trajectoire d'un de ses points et nous représenterons par α le vecteur unité dirigé suivant la droite. En rapportant α au trièdre de Frenet, nous pouvons poser

$$(1) \qquad \alpha = x\xi + y\nu + z\mu \qquad \text{avec} \qquad T\alpha = 1.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que la surface engendrée par la droite

$$\varpi = \xi + u\alpha$$

soit développable est que deux génératrices infiniment voisines quelconques se rencontrent, ce qui donne la condition [n° 73, (9a)]

$$S\alpha\, d\alpha\, dz = 0.$$

Exprimons $d\alpha$ au moyen de (1) et des formules (F) (85), nous trouvons

$$(2) \qquad \tau(y^2 - z^2) = \theta xz + z\,dy - y\,dz.$$

Posons

$$x = \cos\psi, \qquad y = \sin\psi\cos\eta, \qquad z = \sin\psi\sin\eta,$$

en désignant par ψ l'angle de l'émanante avec la tangente à la courbe directrice, et par η l'angle du plan passant par la tangente et par l'émanante avec la normale principale (faire la figure), l'équation (2) devient

$$(3) \qquad \operatorname{tang}\psi(\tau + d\eta) = \theta\sin\eta,$$

équation dont on peut tirer de nombreuses conséquences.

II. *Si un plan passant par la tangente est entraîné par le trièdre de Frenet et fait un angle constant avec la normale principale, sa caractéristique est la projection sur ce plan de la rectifiante de la courbe.*

Car alors $\eta = \text{const.}$, $d\eta = 0$. D'où (*Exercice* précédent)

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{\theta}{\tau}\sin\eta = \operatorname{tang}\zeta\sin\eta,$$

où ζ est l'angle de la rectifiante avec la tangente à la courbe. On en déduit facilement le théorème (*Application d'une propriété des triangles sphériques rectangles*).

III. *Dans le cas où l'émanante reste dans le plan normal, trouver l'arête de rebroussement de la développable engendrée.*

On a alors $\psi = \frac{\pi}{2}$ et (3) se réduit à

$$\tau - d\eta = C \qquad \text{ou} \qquad \eta = C - T,$$

où C est une constante et T la longueur de l'indicatrice sphérique de la binormale comptée à partir d'une origine arbitraire. L'expression de α devient

$$\alpha = \nu \cos\eta + \mu \sin\eta.$$

En appliquant alors la formule (10) du n° 73, on trouve

$$\sigma = \rho + r\nu + r\mu \operatorname{tang}(C - T),$$

où r est le rayon de courbure de la directrice.

On peut déduire de cette formule toute la théorie des développées des courbes gauches.

IV. *Montrer que si l'on désigne par r le rayon de courbure et r_1 le rayon de torsion* (ou l'inverse de la torsion) *d'une courbe en un point, on a*

$$S\rho'\rho''\rho''' = -\frac{1}{r^2 r_1},$$

l'arc de la courbe étant pris comme variable indépendante (*cf.* n° 83).

On a

$$d(\rho'\rho'') = (\rho''^2 + \rho'\rho'')\,ds,$$

d'où

$$S\rho''\,d(\rho'\rho'') = -S\rho'\rho''\rho'''\,ds.$$

Or, on trouve facilement (*cf.* formules de Frenet)

$$d(\rho'\rho'') = \mu\, d\frac{1}{r} + \frac{1}{r}\,d\mu;$$

d'où, en opérant par $S\rho''$, on trouve la formule proposée.

V. *Montrer que les courbes pour lesquelles le rapport de la courbure à la torsion est constant sont des hélices tracées sur un cylindre à base quelconque* (Puiseux).

On a, par (F),

$$d\rho' = \rho\theta, \qquad d\varphi = -a\rho\theta;$$

d'où

$$a\,d\rho' - d\varphi = 0.$$

Le vecteur $\delta = a\rho' - \varphi$ est donc *constant*. Ce vecteur a la direction de la rectifiante et l'on a

$$S\rho'\delta = S\rho'(a\rho' - \varphi) = -a.$$

La tangente à la courbe fait donc *un angle constant avec une direction fixe.*

VI. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une courbe soit sphérique est que les plans normaux passent par un point fixe.*

La condition est nécessaire. Elle est suffisante, car si nous mettons l'origine au point fixe, on a $S\rho\rho' = 0$, quel que soit ρ ou $T\rho = \text{const.}$

D. — Surfaces courbes.

96. I. *En tout point d'une géodésique d'une surface de révolution, le produit du rayon du parallèle par le cosinus de l'angle de l'inclinaison de la géodésique sur le parallèle est constant* (théorème de Clairaut).

α étant l'axe de révolution, l'équation d'une surface de révolution est

$$S\alpha\rho = \varphi(\rho^2);$$

d'où, par différentiation,

$$S(\alpha - 2\rho\varphi')\,d\rho = 0.$$

La normale est donc parallèle à $\alpha - 2\rho\varphi'$. L'équation des géodésiques

$$Sn\,d\rho\,d^2\rho = 0$$

donne alors

$$V\rho''(\alpha - 2\rho\varphi') = 0;$$

d'où, en opérant par $S\rho$,

$$S\alpha\rho\rho'' = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{d}{ds}S\alpha\rho\rho' = 0, \quad SV\alpha\rho\rho'_s = C.$$

II. On appelle *congruence de droites* un ensemble de droites dont l'équation dépend de deux paramètres, et que l'on obtient en faisant

varier ces paramètres. *Trouver la condition pour qu'une congruence de droites soit normale à une surface.*

Soit une droite

$$\varpi = \rho + z\alpha,$$

où ρ et α dépendent de deux paramètres u et v. Pour qu'elles soient normales à une surface il faut que l'on ait

$$S\alpha\, d\varpi = 0,$$

quel que soit le rapport $\frac{du}{dv}$ des variations des paramètres

$$0 = S\alpha(d\rho + z\,d\alpha + \alpha\,dz) = S\alpha\,d\rho + dz$$

ou

$$dz = S\alpha\rho'_u\,du + S\alpha\rho'_v\,dv.$$

On doit donc avoir, puisque le second membre doit être une différentielle exacte

$$\frac{\partial}{\partial v} S\alpha\rho'_u = \frac{\partial}{\partial u} S\alpha\rho'_u$$

ou

$$S\rho'_u\frac{\partial\alpha}{\partial v} = S\rho'_v\frac{\partial\alpha}{du}.$$

C'est la condition cherchée. Si elle est remplie, on a

$$z = \int S\alpha\rho'_u\,du + \int S\alpha\rho'_v\,dv + C$$

et il y a une infinité de surfaces *parallèles* répondant à la question.

III. *Montrer que les lignes géodésiques sont les lignes de plus courte distance tracées entre deux points ou deux courbes tracées sur une surface.*

On a

$$\delta T\,d\rho = -SU\,d\rho\,\delta d\rho = -SU\,d\rho\,d\delta\rho.$$

On en déduit, pour la variation d'un arc de courbe,

$$\delta\int T\,d\rho = \int\delta T\,d\rho = -\Delta SU\,d\rho\,\delta\rho + \int S\,dU\,d\rho\,\delta\rho.$$

Si la courbe est assujettie à rester sur une surface, on a

$$n\,d\rho = 0, \qquad n\,\delta\rho = 0,$$

et pour que la variation soit nulle (condition du minimum),

$$SU\,d\rho_0\,\delta\rho_0 = 0, \qquad SU\,d\rho_1\,\delta\rho_1 = 0,$$

conditions aux limites, et

$$\mathrm{V}\, n\, dU\, d\rho = 0.$$

Cette dernière, en prenant s comme variable indépendante, est équivalente à

$$\mathrm{V}\, n\, d^2\rho = 0,$$

qui montre que la normale principale à la courbe est normale à la surface.

IV. *Si deux surfaces se coupent suivant une ligne qui est ligne de courbure pour chacune d'elles, elles se coupent sous un angle constant* (théorème d'Ossian Bonnet).

Car on a en un point de cette courbe

$$\frac{1}{r_1} - \frac{d\mathrm{H}_1}{ds} = \frac{1}{r_1} + \frac{d\mathrm{H}_2}{ds} = 0 \qquad \text{ou} \qquad d(\mathrm{H}_1 - \mathrm{H}_2) = 0.$$

V. *Si les lignes asymptotiques en un point d'une surface sont rectangulaires, elles ont, en ce point, même courbure et une torsion nulle.*

Car soient ρ', j, n les directions des arêtes du trièdre de l'une des lignes, celles de l'autre ligne seront j, $-\rho'$, n, et l'on aura les deux systèmes d'équations (90)

$$\begin{aligned} d\rho' &= \theta j, & dj &= -\rho'\theta', \\ dj &= -\theta\rho' + \tau n, & -d\rho' &= -j\theta' + n\tau', \\ dn &= -\tau j, & dn &= \rho'\tau'; \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\theta = \theta', \qquad \tau = \tau' = 0.$$

VI. *Note sur les formules contragradientes.* — Considérons une substitution linéaire homogène :

$$(1) \qquad \begin{cases} \mathrm{X} = ax + by + cz, \\ \mathrm{Y} = a'x + b'y + c'z, \\ \mathrm{Z} = a''x + b''y + c''z, \end{cases}$$

dont nous supposons le déterminant $\Delta \neq 0$. On sait que l'on en tire

$$x = \frac{1}{\Delta}(\alpha\mathrm{X} + \alpha'\mathrm{Y} + \alpha''\mathrm{X}), \qquad y = \frac{1}{\Delta}(\beta\mathrm{X} + \ldots), \qquad z = \frac{1}{\Delta}(\gamma\mathrm{X} + \ldots),$$

où α, α', α'', β, ..., γ, ... sont les mineurs du déterminant Δ qui sont

dans ce déterminant les coefficients de a, a', a'', b, ..., c, ... S'il arrive que ces formules se réduisent aux suivantes,

$$(2)\qquad \begin{cases} x = aX + a'Y + a''Z, \\ y = bX + b'Y + b''Z, \\ z = cX + c'Y + c''Z, \end{cases}$$

on dit que les substitutions (1) et (2) sont *contragradientes* [1]. (Remarquer la symétrie par rapport à la diagonale.)

Ce cas se présente lorsque la substitution (1) est *orthogonale*, c'est-à-dire que l'on a

$$(3)\qquad \begin{cases} a^2 + a'^2 + a''^2 = b^2 + b'^2 + b''^2 = c^2 + c'^2 + c''^2 = 1, \\ ab + a'b' + a''b'' = bc + b'c' + b''c'' = ca + c'a' + c''a'' = 0, \end{cases}$$

avec $\Delta = +1$. Or, dans les formules du n° 79 on a $\Delta = +1$, et il est clair que les conditions (3) sont satisfaites par les coefficients de i', j', k', car ceux-ci ne sont autres que les cosinus directeurs des directions i', j', k', par rapport à i, j, k. On a donc immédiatement

$$\begin{aligned} i &= (w^2 + l^2 - m^2 - n^2)i + 2(lm + wn)j + 2(ln - wm)k, \\ j &= 2(lm - wn)i + \ldots, \\ k &= 2(ln + wm)i + \ldots \end{aligned}$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} X &= (w^2 + l^2 - m^2 - n^2)x + 2(lm - wn)y + 2(ln + wm)z, \\ Y &= 2(lm + wn)x + (w^2 - l^2 + m^2 - n^2)y + 2(mn - wl)z, \\ Z &= 2(ln - wn)x + 2(wl + mn)y + (w^2 - l^2 - m^2 + n^2)z. \end{aligned}$$

Ce sont les formules dites de *Rodrigues* (dues à Euler, Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg, 1770).

---

[1] Ceci n'est d'ailleurs qu'un *cas particulier* de la définition générale des substitutions contragradientes.

CHAPITRE IX.

LA FONCTION LINÉAIRE ET LA SURFACE DU SECOND ORDRE.

97. **Définition.** — On dit en Algèbre qu'une fonction f, d'une variable quelconque z est *linéaire* lorsque l'on a, quelles que soient les valeurs particulières de la variable z, l'identité

$$f(z_1 + z_2) = f(z_1) + f(z_2),$$

et l'on en déduit facilement les deux propriétés caractéristiques de la fonction linéaire

$$(1) \qquad \begin{cases} f(mz) = mf(z), \\ f(dz) = df(z), \end{cases}$$

où m est une constante quelconque et d le symbole ordinaire de la différentiation.

Par analogie nous appellerons, avec Hamilton [1], *fonction vectorielle linéaire* une fonction $\varphi\rho$ satisfaisant à la condition

$$(2) \qquad \varphi(\rho_1 + \rho_2) = \varphi\rho_1 + \varphi\rho_2,$$

quels que soient ρ_1 et ρ_2. Mais, au lieu de considérer φ comme un *signe fonctionnel*, ainsi que le faisait expressément Hamilton [2], nous regarderons φ comme un *facteur* qui transforme un *vecteur en un vecteur* et qui jouit de la propriété (2) et par suite des propriétés (1). Il existe de tels facteurs, car, en particulier, l'unité absolue $+1$ et l'unité négative et en général un nombre scalar quelconque satisfont à ces relations. Nous ajouterons la condition que $\varphi\rho$ ne contient pas de terme constant, c'est-à-dire que

$$\varphi\rho = 0$$

condition d'ailleurs incluse dans les précédentes puisque $\varphi\rho$ doit être un vecteur.

---

(1) *E.*, 347.
(2) *E.*, 347; *L.*, 475.

Le produit $\varphi\rho$ étant un vecteur qui doit dépendre *linéairement* de ρ contiendra des termes de la forme :

1° $V a\rho b$ où a, b sont des quaternions constants ;

2° $\alpha S a'\rho b'$ où a', b' sont des quaternions constants et α un vecteur constant ;

3° $m\rho$ où m est un scalar.

Si nous décomposons les a, b, a', b' en leurs parties réelles et vectorielles, et que nous exprimions les vecteurs et ρ en fonction de trois vecteurs arbitraires λ, μ, ν, on voit, par un calcul facile, que φ prendra la forme

$$\varphi\rho = \alpha S\lambda\rho + \beta S\mu\rho + \gamma S\nu\rho. \tag{3}$$

où α, β, γ sont *trois vecteurs constants* et le même calcul montre que φ dépend en général de *neuf* coefficients scalars $S\alpha\lambda$, $S\alpha\mu$, $S\alpha\nu$, $S\beta\lambda$, ... Ces scalars varieront d'une fonction φ à une autre et détermineront dans chaque cas la composition de cette fonction.

Nous appelons *conjuguée* de la fonction φ la fonction φ' définie par l'équation

$$\varphi'\rho = \lambda S\alpha\rho + \mu S\beta\rho + \nu S\gamma\rho. \tag{4}$$

La notation φ' est celle d'Hamilton. Quelques auteurs emploient aussi la notation $K\varphi$. La propriété fondamentale de la conjuguée est donnée par l'identité

$$S\rho\varphi\sigma = S\sigma\varphi'\rho. \tag{5}$$

qui a lieu *quels que soient* ρ *et* σ ainsi qu'on le voit immédiatement. Cette propriété est *caractéristique* et peut servir de définition à la fonction φ'.

98. **Forme du facteur φ. Dyade. Dyadique.** — Il est clair qu'il nous est actuellement impossible de mettre l'expression

$$\varphi\rho = \alpha S\lambda\rho + \beta S\mu\rho + \gamma S\nu\rho.$$

sous forme d'un produit, en mettant ρ en facteur, car nous ne pouvons attribuer aucun sens à une expression telle que

$$\alpha S\lambda + \beta S\mu + \gamma S\nu.$$

Nous parviendrons à exprimer φ en introduisant une notion nouvelle celle de la *dyade* et une *multiplication* nouvelle, la *multiplication dyadique*.

Définition. — Nous appelons *dyade* [1] le symbole [2]

$$\alpha ; \lambda,$$

où α et λ sont deux vecteurs quelconques, dont le premier s'appelle *antécédent* et le second *conséquent* de la dyade.

Ce symbole actuellement dénué de sens sera défini lorsque nous aurons défini l'égalité de deux dyades. Nous dirons que deux dyades

$$\alpha ; \lambda \quad \text{et} \quad \alpha' ; \lambda'$$

sont égales, lorsque nous avons, *quel que soit le vecteur* ρ,

$$(a) \qquad \alpha S \lambda \rho = \alpha' S \lambda' \rho$$

et nous disons alors que le vecteur

$$\alpha S \lambda \rho$$

est le *produit dyadique scalaire* de la dyade $\alpha ; \lambda$ et du vecteur ρ, de sorte que la multiplication dyadique scalaire est *définie par la relation*

$$(b) \qquad (\alpha ; \lambda) \rho = \alpha S \lambda \rho.$$

Il est clair que cette multiplication *n'est pas commutative* et que l'on ne peut pas, dans une dyade, permuter entre eux l'antécédent et le conséquent à moins qu'ils ne soient égaux.

L'équation (a) indique que pour que les deux dyades $\alpha ; \lambda$ et $\alpha' ; \lambda'$ soient égales il faut que les vecteurs α et α' soient parallèles. On doit donc avoir

$$\alpha = m \alpha',$$

où m est un scalar quelconque. On en déduit que

$$\lambda = \frac{1}{m} \lambda'.$$

Il résulte de là que l'égalité

$$\alpha ; \lambda = \alpha' ; \lambda'$$

entraîne l'égalité

$$\lambda ; \alpha = \lambda' ; \alpha'$$

et que de l'égalité (quel que soit ρ)

$$\alpha S \lambda \rho = \alpha' S \lambda' \rho,$$

---

(1) GIBBS, *Vector Analysis.*

(2) La notation provisoirement employée ici est celle de JAUMANN.

on déduit l'égalité

$$\lambda S\alpha\rho = \lambda' S\alpha'\rho,$$

de sorte que si nous désignons par φ et ψ deux dyades *égales* nous avons, quel que soit ρ,

$$\varphi\rho = \psi\rho \qquad \text{et} \qquad \rho\varphi = \rho\psi$$

et de plus

$$\tau\varphi\rho = \sigma\psi\rho,$$

quels que soient les vecteurs σ et ρ, en désignant évidemment par $\sigma\varphi\rho$ l'expression

$$S\alpha\sigma S\lambda\rho \qquad \text{si} \qquad \varphi = \alpha;\ \lambda.$$

Remarque. — Nous supprimerons fréquemment dans l'écriture le signe de séparation ; lorsqu'il ne pourra en résulter aucune ambiguïté et nous écrirons simplement

$$\varphi\rho = (\alpha\lambda)\rho.$$

Cette dernière notation est celle de Gibbs (*Vector Analysis*). La notation

$$\varphi\rho = (\alpha;\ \lambda)\rho$$

est celle de Jaumann (*Bewegungslehre*).

99. — Ceci posé, une somme algébrique de dyades de la forme

$$\varphi = \Sigma(\alpha;\ \lambda)$$

s'appelle une ***dyadique*** et l'égalité de deux dyadiques

$$\varphi = \Sigma(\alpha;\ \lambda) \qquad \text{et} \qquad \psi = \Sigma(\alpha';\ \lambda')$$

est également définie par l'égalité

$$(c) \qquad \Sigma\alpha S\lambda\rho = \Sigma\alpha' S\lambda'\rho,$$

quel que soit le vecteur ρ.

Pour obtenir les conditions qui résultent de cette définition, nous remarquerons que nous pouvons décomposer les vecteurs α, λ, ..., α', λ'; ... suivant trois directions arbitraires non coplanaires, par exemple les directions i, j, k. Supposons que nous obtenions ainsi

$$\alpha = a_1 i + a_2 j + a_3 k,$$
$$\lambda = l_1 i + l_2 j + l_3 k,$$

et des valeurs analogues pour les α' et λ'. Il est clair que les dya-

diques φ et ψ prendront alors la forme de sommes des neuf dyades

$$i:i,\quad i:j,\quad i:k,\quad j:i,\quad j:j,\quad j:k,\quad k:i,\quad k:j,\quad k:k$$

multipliées respectivement par des coefficients scalars positifs ou négatifs et que l'on aura après réduction, en supprimant le signe; pour simplifier,

$$\varphi = aii + bij + cik + dji + \ldots + mkk,$$
$$\psi = a'ii + b'ij + \ldots\ldots\ldots\ldots + m'kk.$$

On dit alors que les dyadiques φ et ψ sont réduites à la *forme nonion*. En posant

$$\rho = ix + jy + kz,$$

nous en déduisons que la condition d'égalité des dyadiques exige que les équations

$$ax + by + cz = a'x + b'y + c'z,$$
$$dx + \ldots\ldots\ldots + d'x + \ldots\ldots\ldots,$$
$$hx + \ldots + mz = h'x + \ldots + m'z,$$

soient satisfaites, quelles que soient les valeurs de x, y, z, c'est-à-dire

$$a = a',\qquad b = b',\qquad c = c',\qquad \ldots,\qquad m = m'.$$

Deux dyadiques égales réduites à la forme nonion sont donc identiques.

On trouverait les mêmes conditions en exprimant que l'égalité

$$(d)\qquad \Sigma\lambda S\alpha\rho = \Sigma\lambda' S\alpha'\rho$$

a lieu quel que soit le vecteur ρ.

Les conditions (c) et (d) sont donc identiques, c'est-à-dire que les deux équations

$$\Sigma(\alpha;\lambda) = \Sigma(\alpha';\lambda')$$

et

$$\Sigma(\lambda;\alpha) = \Sigma(\lambda';\alpha')$$

sont équivalentes et découlent l'une de l'autre

Théorème I. *On peut toujours ramener une dyadique quelconque à une dyadique contenant au plus trois termes, c'est-à-dire de la forme*

$$\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu.$$

En effet, sous la forme nonion nous pouvons écrire

$$\varphi = (ai + dj + hk):i + (bi + \ldots):j + (ci + \ldots + mk):k$$

ou bien en posant

$$ai + dj + hk = i', \qquad \ldots.$$

on aura

$$\varphi = i'i + j'j + k'k.$$

La réduction est possible *d'une infinité de façons* car nous pourrions prendre au lieu de i, j, k trois autres vecteurs quelconques non coplanaires et procéder de la même manière.

THÉORÈME II. — *De quelque façon que l'on transforme une dyadique, les expressions*

$$\Sigma S\alpha\lambda \quad \text{et} \quad \Sigma V\alpha\lambda$$

restent invariantes.

En effet, on peut mettre la dyadique d'une seule façon sous forme nonion,

$$Aii + A'ij + A''ik + Bji + \ldots + Cki + \ldots,$$

Si nous posons

$$\alpha = ai + bj + ck,$$
$$\lambda = li + mj + nk.$$

nous avons donc

$$\Sigma(\alpha;\lambda) = \Sigma(ai + bj + ck);(li + mj + nk):$$

d'où

$$\Sigma S\alpha\lambda = -\Sigma(al + bm + cn),$$

mais on a

$$\begin{aligned} A &= \Sigma al, & A' &= \Sigma am, & A'' &= \Sigma an, \\ B &= \Sigma bl, & B' &= \Sigma bm, & B'' &= \Sigma bn, \\ C &= \Sigma cl, & C' &= \Sigma cm, & C'' &= \Sigma cn. \end{aligned}$$

Puisque la forme nonion est unique, les coefficients A, A', ..., C'' sont des constantes. Or on a

$$\Sigma S\alpha\lambda = -(A + B' + C'') = \text{const.},$$
$$\begin{aligned} \Sigma V\alpha\lambda &= \Sigma i(bn - cm) + j(cl - an) + k(am - bl) \\ &= i(B'' - C') + j(C - A'') + k(A' - B) = \text{un vecteur constant.} \end{aligned}$$

Ce qui démontre la proposition.

Remarque. — On peut exprimer ce théorème en disant que le *quaternion*

$$q = \Sigma\alpha.\lambda$$

reste constant dans toute transformation.

Nous pouvons alors poser

$$\sigma = \varphi\rho = (\alpha;\lambda + \beta;\mu + \gamma;\nu)\rho$$

et regarder σ comme le résultat de la multiplication de ρ par le facteur

$$\varphi = \alpha : \lambda + \beta : \mu + \gamma : \nu,$$

la règle de la multiplication étant donnée par la définition

$$(\alpha : \lambda)\rho = \alpha S\lambda\rho.$$

On aura aussi

$$\rho\varphi = \lambda S\alpha\rho + \mu S\beta\rho + \nu S\gamma\rho$$

et

$$S\rho\varphi\sigma = S\alpha\rho S\lambda\sigma + S\beta\rho S\mu\sigma + S\gamma\rho S\nu\sigma$$

De l'équation

$$\sigma = \varphi\rho,$$

nous pouvons tirer par division

$$\frac{\sigma}{\rho} = \varphi.$$

La notation $\frac{\sigma}{\rho} = \varphi$ n'indique rien de plus ni de moins que la notation $\sigma = \varphi\rho$. Elle exprime que nous regardons la division dyadique comme opération inverse de la multiplication, c'est-à-dire que de l'équation

$$\frac{\sigma}{\rho} = \varphi$$

nous tirons

$$\sigma = \varphi\rho \qquad (\text{et non } \sigma = \rho\varphi),$$

de même que de l'équation

$$\frac{\beta}{\alpha} \qquad \text{nous tirons} \qquad \beta = q\alpha.$$

La dyadique *conjuguée de* φ a pour expression [n° 97 (4)],

$$\varphi' = \lambda : \alpha + \mu : \beta + \nu : \gamma.$$

Remarquons que l'on a

$$\varphi\rho = \rho\varphi'.$$

Il n'existe d'ailleurs entre la division dyadique et la division quaternionienne qu'une analogie de forme que l'on ne peut poursuivre plus loin, car *une dyadique n'est pas un quaternion*.

100. Dyadique inverse. — Soit φ une dyadique,

$$(1) \qquad \varphi = \alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu.$$

En opérant sur un vecteur quelconque ρ nous savons qu'elle donne naissance à un nouveau vecteur

$$\sigma = \varphi\rho.$$

Nous appelons *dyadique inverse* de φ, la dyadique ψ qui opérant sur σ reproduit ρ, ou telle que

$$\rho = \psi\sigma.$$

Considérons le vecteur

$$\sigma = \varphi\rho = \alpha S\lambda\rho + \beta S\mu\rho + \gamma S\nu\rho.$$

Opérons successivement sur σ par $S\alpha'$, $S\beta'$, $S\gamma'$, en désignant par α', β', γ' le système réciproque (n° **66**) de α, β, γ [1]. Il vient

$$S\alpha'\sigma = -S\lambda\rho, \qquad S\beta'\sigma = -S\mu\rho, \qquad S\gamma\sigma = -S\nu\rho;$$

d'où en remplaçant $S\lambda\rho$,... par ces valeurs dans l'identité [*voir* n° **66**, (6)]

$$\rho = -(\lambda' S\lambda\rho + \mu' S\mu\rho + \nu' S\nu\rho),$$

il vient

$$\begin{aligned}\rho = \psi\sigma &= \lambda' S\alpha'\sigma + \mu' S\beta'\sigma + \nu' S\gamma'\sigma \\ &= (\lambda'; \alpha' + \mu'; \beta' + \nu'; \gamma')\sigma;\end{aligned}$$

on a donc

$$\psi = \lambda'; \alpha' + \mu'; \beta' + \nu'; \gamma',$$

ce qui donne l'expression de la fonction inverse lorsque φ est mise sous la forme canonique (1). Nous trouverons plus loin (n° **106**) une méthode générale permettant d'obtenir directement la fonction inverse d'une fonction linéaire $\varphi\rho$ sans avoir besoin de la mettre d'abord sous la forme (1) et qui a l'avantage de s'appliquer également lorsque les vecteurs α, β, γ sont coplanaires (n° **118**).

101. Produit de deux dyadiques. — Considérons d'abord deux dyades

$$\alpha; \lambda \quad \text{et} \quad \beta; \mu$$

que nous désignons respectivement par φ et ψ. On a *par définition*

$$(a) \qquad \begin{cases} \varphi\rho = \alpha S\lambda\rho, \\ \psi\rho = \beta S\mu\rho. \end{cases}$$

Si dans la première de ces identités nous remplaçons ρ par le vec-

---

[1] Ceci suppose, par conséquent, que les vecteurs α, β, γ ne sont pas coplanaires, sinon le système réciproque n'existe pas. (*Voir* n° 66.)

teur $\psi\rho$, nous obtenons

$$(b) \qquad \varphi\psi\rho = \alpha S\lambda(\beta S\mu\rho) + (\alpha : \mu)\rho S\lambda\beta.$$

Nous désignons la fonction $\varphi\psi$ ainsi obtenue sous le nom de *produit des dyades* φ et ψ et nous voyons que nous avons la *règle suivante* :

Le *produit de deux dyades* s'obtient en formant la dyade qui a pour antécédent celui de la première et pour conséquent celui de la seconde en multipliant la dyade ainsi formée par le produit scalaire des deux autres termes.

Ce produit n'est pas commutatif.

Par définition, le produit de *deux dyadiques* est la somme des produits obtenus en multipliant deux à deux les dyades qui les composent au moyen de la règle précédente.

Formons, par exemple, le produit de la dyadique φ et de la fonction inverse ψ. Nous aurons

$$\varphi\psi = \Sigma(\alpha : \lambda)(\lambda' ; \alpha') = -(\alpha : \alpha' - \beta : \beta' + \gamma : \gamma').$$

Une dyadique telle que la précédente possède la propriété que l'on a, quel que soit ρ,

$$(\varphi\psi)\rho = \rho(\varphi\psi) = \rho.$$

Nous poserons donc

$$\varphi\psi = 1 \text{ (1)},$$

ce qui permet d'écrire

$$\psi = \varphi^{-1},$$

en admettant la convention

$$\varphi\varphi^{-1} = \varphi^{-1}\varphi = \varphi^0 = 1.$$

Nous représenterons donc, en général par φ^{-1} la dyadique inverse de φ. Remarquons que l'on a

$$\varphi^{-1} = \lambda'\alpha' + \mu'\beta' + \nu'\gamma',$$
$$\varphi' = \lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma;$$

d'où l'on déduit

$$(\varphi^{-1})' = \alpha'\lambda' + \beta'\mu' + \gamma'\nu',$$

et, par suite,

$$(\varphi^{-1})' = (\varphi')^{-1},$$

c'est-à-dire : *L'inverse de la conjuguée est égale à la conjuguée de l'inverse*. Ceci permet d'écrire φ'^{-1} sans ambiguïté.

---

(1) *Voir* Note à la fin du Chapitre, n° 110.

Nous reportant maintenant à la remarque n° 99 au sujet de la notation $\frac{\sigma}{\rho} = \varphi$, nous voyons que nous en déduisons réciproquement

$$\frac{\rho}{\sigma} = \varphi^{-1} = \frac{1}{\varphi},$$

propriété du facteur φ analogue à celle du calcul algébrique ordinaire. Mais on doit tirer de là $\rho = \frac{1}{\varphi}\sigma$ et non $\rho = \sigma\frac{1}{\varphi}$.

102. Définition. — Deux dyadiques φ et ψ sont dites *homologues* [1] lorsque l'on a

$$\varphi\psi = \psi\varphi.$$

En posant alors suivant une convention analogue à celle du calcul des quaternions $\left(\frac{\beta}{\alpha} = \beta\alpha^{-1}\right)$

$$\frac{\psi}{\varphi} = \psi\varphi^{-1}.$$

On peut appliquer aux dyadiques homologues des règles de calcul analogues à celles du Calcul algébrique. Il suffit de démontrer pour cela que si φ est homologue à ψ, φ^{-1} l'est aussi. Or on a, ψ et φ étant homologues,

$$\psi\varphi^{-1} = \varphi^{-1}\varphi\psi\varphi^{-1} = \varphi^{-1}\psi\varphi\varphi^{-1} = \varphi^{-1}\psi.$$

Ce qui démontre que φ^{-1} est homologue à ψ. On peut donc, *dans ce cas*, écrire indifféremment

$$\frac{\psi}{\varphi} = \psi\varphi^{-1} \qquad \text{ou} \qquad = \varphi^{-1}\psi.$$

On a, par exemple, si φ et ψ sont homologues,

$$\varphi^{-1} - \psi^{-1} = \frac{1}{\varphi} - \frac{1}{\psi} = \frac{\psi - \varphi}{\varphi\psi}$$

exactement comme en algèbre. En effet, on a généralement le théorème suivant :

Théorème III. — Le produit des inverses de deux dyadiques *homologues* est égal à l'inverse de leur produit.

C'est-à-dire que l'on a

$$\psi^{-1}\varphi^{-1} = \varphi^{-1}\psi^{-1} = (\varphi\psi)^{-1}.$$

---

[1] GIBBS, *Vector Analysis*, n° 133.

Ce théorème résulte de l'identité évidente

$$\varphi\psi\psi^{-1}\varphi^{-1} = \psi\varphi\varphi^{-1}\psi^{-1} = 1$$

qui est générale et qui, dans le cas particulier des fonctions homologues où $\varphi\psi = \psi\varphi$, donne immédiatement en divisant par $\varphi\psi$

$$\psi^{-1}\varphi^{-1} = \varphi^{-1}\psi^{-1} = \frac{1}{\varphi\psi} = \frac{1}{\psi\varphi} = (\varphi\psi)^{-1}.$$

Il en résulte alors dans l'exemple précédent

$$\frac{\psi - \varphi}{\varphi\psi} = (\psi - \varphi)(\varphi\psi)^{-1} = \psi\psi^{-1}\varphi^{-1} - \varphi\varphi^{-1}\psi^{-1} = \varphi^{-1} - \psi^{-1}.$$

103. Transformation linéaire. — La multiplication d'un vecteur radial ρ par la dyadique φ revient à opérer sur ρ une transformation linéaire homogène. Soit en effet la dyadique

$$\varphi = \alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu.$$

Nous avons

$$\sigma = \varphi\rho = (\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu)\rho.$$

Posons

$$\sigma = Xi + Yj + Zk,$$
$$\rho = xi + yj + zk$$

et soient

$$\alpha = ai + bj + ck, \qquad \beta = a'i + \ldots, \qquad \gamma = a''i + \ldots,$$
$$\lambda = li + mj + nk, \qquad \mu = l'i + \ldots, \qquad \nu = l''i + \ldots.$$

Nous aurons l'équation

$$Xi + Yj + Zk = \Sigma(ai + bj + ck)(lx + my + nz).$$

Égalons les coefficients de i, j, k de part et d'autre, on trouve des expressions de la forme

$$(a) \qquad \begin{cases} X = px + qy + rz, \\ Y = p'x + q'y + r'z, \\ Z = p''x + q''y + r''z, \end{cases}$$

c'est-à-dire que X, Y, Z sont des fonctions linéaires homogènes des composantes du vecteur ρ. Les coefficients p, q, r, ... dépendent des composantes des α, λ, ..., c'est-à-dire de la composition de la dyadique φ.

Le déterminant des coefficients de la transformation s'appelle

déterminant de la dyadique et se représente par $|\varphi|$. On a donc

$$|\varphi| = \begin{vmatrix} p & q & r \\ p' & q' & r' \\ p'' & q'' & r'' \end{vmatrix}.$$

Il est clair que le *déterminant de la fonction conjuguée*

$$\varphi' = \lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma$$

est donné par la formule

$$|\varphi'| = \begin{vmatrix} p & p' & p'' \\ q & q' & q'' \\ r & r' & r'' \end{vmatrix}.$$

Il est donc égal à celui de φ, mais il a *tourné autour de la diagonale principale*, de sorte que les composantes X', Y', Z' de σ' sont différentes.

Lorsque l'on connaît le déterminant $|\varphi|$, les composantes de σ sont déterminées en fonction des composantes x, y, z de ρ par les équations (a). Cela permet de représenter symboliquement la fonction φ par le symbole

$$\varphi = \begin{Vmatrix} p & q & r \\ p' & q' & r' \\ p'' & q'' & r'' \end{Vmatrix}.$$

On voit que la transformation φ dépend en général de neuf coefficients scalars.

104. On appelle *tenseur* ou dyadique *autoconjuguée* une transformation dont le déterminant est symétrique et ne dépend, par conséquent, que de *six* paramètres

$$\varphi = \begin{Vmatrix} p & q & r \\ q & p' & s \\ r & s & p'' \end{Vmatrix}.$$

Il est clair que la fonction conjuguée d'un tenseur est ce tenseur lui-même, puisque φ' a la même matrice symbolique que φ.

On appelle *antisymétrique* une transformation dont le déterminant est antisymétrique, c'est-à-dire de la forme

$$\varphi = \begin{Vmatrix} 0 & p & q \\ -p & 0 & r \\ -q & -r & 0 \end{Vmatrix}.$$

Théorème IV. — Une transformation antisymétrique peut se mettre sous la forme

$$\sigma = \varphi\rho = V\varepsilon\rho,$$

ε étant un vecteur indépendant de ρ.

La transformation donne, en effet,

$$X = py - qz, \qquad Y = -px - rz, \qquad Z = -(qx + ry)$$

ou bien

$$\sigma = (py - qz)i - (rz - px)j + (qx + ry)k$$

ou bien

$$\sigma = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -r & q & -p \\ x & y & z \end{vmatrix} = V\varepsilon\rho,$$

en posant

$$\varepsilon = -ri + qj - pk.$$

Théorème V. — Une transformation linéaire quelconque peut se mettre sous la forme de la somme d'un tenseur et d'une transformation antisymétrique.

Cela résulte immédiatement de ce que le déterminant de φ peut s'écrire

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2p & q+p & r+p'' \\ p'+q & 2q' & r'+q'' \\ p''+r & q''+r' & 2r'' \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & q-p' & r-p'' \\ p'-q & 0 & r'-q'' \\ p''-r & q''-r' & 0 \end{vmatrix}.$$

La transformation qui se rapporte au premier de ces déterminants est un *tenseur* et s'exprime par $\frac{1}{2}(\varphi + \varphi')$. La seconde est *antisymétrique* et s'exprime par $\frac{1}{2}(\varphi - \varphi')$. On a donc l'identité

$$\varphi = \frac{1}{2}(\varphi + \varphi') + \frac{1}{2}(\varphi - \varphi').$$

On peut aussi écrire

$$\varphi\rho = \psi\rho + V\varepsilon\rho,$$

où ψ est un tenseur. Nous trouverons plus loin l'expression du vecteur ε (n° 134, VIII), qui nous permettra d'écrire d'une manière générale

$$\varphi = \frac{1}{2}(\varphi + \varphi') + \frac{1}{2}\operatorname{rot}\varphi.$$

105. Invariants de la transformation. — Il est facile de montrer

que dans une transformation linéaire

$$\sigma = \varphi\varphi,$$

les expressions

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} m &= \frac{S\varphi\lambda\varphi\mu\varphi\nu}{S\lambda\mu\nu} = I_3\varphi, \\ m_2 &= \frac{S(\lambda\mu\varphi\nu + \mu\nu\varphi\lambda + \nu\lambda\varphi\mu)}{S\lambda\mu\nu} = I_1\varphi, \\ m_1 &= \frac{S(\lambda\varphi\mu\varphi\nu + \mu\varphi\nu\varphi\lambda + \nu\varphi\lambda\varphi\mu)}{S\lambda\mu\nu} = I_2\varphi \end{aligned}\right.$$

sont des *invariants*, c'est-à-dire ne dépendent pas des valeurs particulières attribuées aux vecteurs λ, μ, ν (non coplanaires). La notation m, m_2, m_1 est celle d'Hamilton. La notation $I_1\varphi$, $I_2\varphi$, $I_3\varphi$ est celle de Burali-Forti.

La démonstration résulte immédiatement du fait que si l'on remplace dans une de ces expressions l'un des vecteurs λ, μ, ν par un vecteur $x\lambda + y\mu + z\nu$ quelconque, l'expression ne change pas.

Il est facile de calculer les valeurs de ces invariants en fonction des coefficients de la transformation. Prenons comme vecteurs λ, μ, ν les vecteurs i, j, k. Nous aurons

$$\begin{aligned} \varphi i &= pi + p'j + p''k, \\ \varphi j &= qi + q'j + q''k, \\ \varphi k &= ri + r'j + r''k. \end{aligned}$$

On en déduit

$$I_1\varphi = m_2 = -S(ij\varphi k + \ldots) = -S(k\varphi k + i\varphi i + j\varphi j) = p + q' + r''$$

ou bien

$$m_2 = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \qquad [\text{n}^{\text{os}}\ 103,\ (a)];$$

nous rétrouverons plus loin cette quantité sous le nom de *divergence* de la fonction σ. On a donc (*voir* n° 134)

$$m_2 = \operatorname{div}\varphi\varphi.$$

On a de même

$$I_3\varphi = m = S\varphi i\varphi j\varphi k = \begin{vmatrix} p & p' & p'' \\ q & q' & q'' \\ r & r' & r'' \end{vmatrix} = \varphi.$$

La valeur de m_1 est moins intéressante. On trouve

$$I_2\varphi = m_1 = q'r'' - q''r' + r''p - rp'' + pq' - qp'.$$

106. Directions principales. Cubique fondamentale. — Cherchons s'il existe dans l'espace des directions *particulières* de ρ que la multiplication par φ ne modifie pas. S'il en est ainsi pour certaines directions particulières (appelées *directions principales*), on devra avoir (g étant un scalar)

$$(a) \qquad \varphi\rho = g\rho$$

ou

$$(a') \qquad \mathrm{V}\rho\varphi\rho = 0.$$

Remplaçons $\varphi\rho$ par sa valeur

$$Xi + Yj + Zk = (px + qy + rz)i + \ldots,$$

nous aurons pour déterminer x, y, z les trois équations

$$(b) \qquad \begin{cases} (p - g)x + qy + rz = 0, \\ p'x + (q' - g)y + r'z = 0, \\ p''x + q''y + (r'' - g)z = 0. \end{cases}$$

Pour que ces équations soient compatibles, il faut que l'on ait

$$\begin{vmatrix} p - g & q & r \\ p' & q' - g & r' \\ p'' & q'' & r'' - g \end{vmatrix} = 0,$$

équation cubique en g. Si nous la développons nous trouvons, en tenant compte des valeurs des invariants m, m_1, m_2 trouvées ci-dessus, qu'elle s'écrit

$$G = g^3 - m_2 g^2 + m_1 g - m = 0.$$

L'équation $G = 0$ s'appelle la *cubique fondamentale de la fonction* φ. Il est clair que si nous formons la cubique en g relative à la conjuguée de φ, cette seconde cubique sera

$$\begin{vmatrix} p - g & p' & p'' \\ q & q' - g & q'' \\ r & r' & r'' - g \end{vmatrix} = 0.$$

Elle est identique à $G = 0$. On a donc le théorème suivant :

Théorème VI. — Les équations cubiques fondamentales en φ et φ' sont les mêmes.

L'équation G, étant du troisième degré, a au moins une racine réelle.

Les deux autres peuvent être réelles ou imaginaires conjuguées. Si l'équation a des racines égales, celles-ci sont nécessairement réelles.

Remarquons que pour les directions *particulières* de ρ, qui satisfont à l'équation (a) ou (a'), on a

$$\varphi = \varphi' = g.$$

Soit g_1 une racine de la cubique en g. Il suffira de porter cette valeur de g dans deux des équations (b) qui détermineront alors les rapports de x, y, z correspondants et, par suite, la direction de ρ_1.

Théorème VII. — La condition pour que l'équation

$$V\rho\varphi\rho = 0$$

soit satisfaite pour *toutes les directions parallèles à un plan* est que l'équation en g ait une racine double.

Prenons, en effet, ce plan comme plan i, j, nous devons avoir

$$\varphi(x'i + y'j) = g(x'i + y'j),$$

quels que soient x' et y' ou bien

$$\varphi i = gi, \qquad \varphi j = gj.$$

Remplaçons φi et φj par leurs valeurs et éliminons g en opérant sur ces équations par Si, Sj, Sk, nous trouvons

$$Si\varphi i = Sj\varphi j \qquad \text{ou} \qquad p = q'.$$

Puis

$$Sj\varphi i = Sk\varphi i = Si\varphi j = Sk\varphi j = 0$$

ou

$$p' = p'' = q = q'' = 0.$$

de sorte que l'équation en g devient

$$0 = \begin{vmatrix} p - g & 0 & r \\ 0 & p - g & r' \\ 0 & 0 & r'' - g \end{vmatrix} = (p - g)^2(r'' - g).$$

Elle a donc une racine double

On verrait de même que pour que l'équation

$$V\rho\varphi\rho = 0$$

soit satisfaite par une *direction quelconque de l'espace*, la condition est que l'équation $G = 0$ ait une racine *triple*.

Ces conditions sont nécessaires et suffisantes.

Théorème VIII. — Les directions qui correspondent à deux racines *inégales* de la cubique en g sont rectangulaires.

Soient g_1 et g_2 deux racines *inégales* de la cubique et ρ_1, ρ_2 les valeurs de ρ correspondantes. On a alors

$$\varphi\rho_1 = g_1\rho_1, \qquad \varphi\rho_2 = g_2\rho_2;$$

d'où, en opérant respectivement par $S\rho_2$ et $S\rho_1$,

$$S\rho_2\varphi\rho_1 = g_1 S\rho_1\rho_2, \qquad S\rho_1\varphi\rho_2 = g_2 S\rho_2\rho_1.$$

Mais pour les directions ρ_2 et ρ_1 qui satisfont à l'équation $V\rho\varphi\rho = 0$, la fonction φ est égale à sa conjuguée, donc

$$S\rho_2\varphi\rho_1 = S\rho_1\varphi\rho_2;$$

d'où, par soustraction,

$$0 = (g_1 - g_2) S\rho_1\rho_2$$

et comme $g_1 - g_2 \neq 0$, on a :

$$S\rho_1\rho_2 = 0.$$

Théorème IX. — Soit g_1 une racine de la cubique en g. L'opération $\varphi - g_1$ appliquée à un vecteur quelconque ρ annule la composante de ρ parallèle à la direction ρ_1 qui correspond à la racine g_1.

Soit (P) un plan perpendiculaire à ρ_1. Il existe dans ce plan au moins deux directions *différentes* qui ne sont pas modifiées par l'opération φ. Soient λ et μ deux de ces directions. Nous pouvons alors poser, ρ étant un vecteur quelconque,

$$\rho = x\rho_1 + y\lambda + z\mu;$$

d'où

$$(\varphi - g_1)\rho = x(\varphi - g_1)\rho_1 + y(\varphi - g_1)\lambda + z(\varphi - g_1)\mu.$$

Mais $(\varphi - g_1)\rho_1 = 0$ et il ne reste alors que deux termes qui n'ont pas de composantes parallèles à ρ_1, puisque $\varphi - g_1$ ne les modifie pas. Ce qui démontre la proposition.

On verrait de même que l'opération

$$(\varphi - g_1)(\varphi - g_2)$$

fait disparaître les composantes d'un vecteur quelconque parallèles aux directions ρ_1, ρ_2 correspondant à g_1 et g_2 et que l'opération :

$$(\varphi - g_1)(\varphi - g_2)(\varphi - g_3)$$

fait disparaître les trois composantes d'un vecteur quelconque. On a

donc identiquement, quel que soit ρ, et φ étant une fonction linéaire quelconque,

$$(\varphi - g_1)(\varphi - g_2)(\varphi - g_3)\rho = 0,$$

g_1, g_2, g_3 étant les trois racines de la cubique en φ. En développant le premier membre, on a

$$\Phi = \varphi^3 - m_2\varphi^2 - m_1\varphi - m = 0,$$

équation à laquelle satisfait une fonction φ quelconque. Une expression telle que φ^2 signifie $\varphi\varphi$ et non φ élevée au carré.

Opérons sur Φ par φ^{-1}, il vient [1]

$$\text{(H)} \qquad m\varphi^{-1} = m_1 - m_2\varphi + \varphi^2,$$

équation due à Hamilton et qui résout généralement le problème du calcul de la fonction φ^{-1}, c'est-à-dire de l'*inversion de la fonction* en le ramenant au calcul des coefficients m, m_1, m_2 et à des opérations directes.

Théorème X. — Les racines de la cubique fondamentale d'un *tenseur* sont toujours réelles.

Soit en effet φ un tenseur et soit $h - f\sqrt{-1}$ une racine imaginaire de la cubique. La direction correspondante à cette valeur de g et satisfaisant à l'équation $V\rho\varphi\rho = 0$ sera alors de la forme $\rho_1 - \sigma_1\sqrt{-1}$ et l'on aura

$$\varphi(\rho_1 - \sigma_1\sqrt{-1}) = (h - f\sqrt{-1})(\rho_1 - \sigma_1\sqrt{-1});$$

d'où

$$\varphi\rho_1 = h\rho_1 - f\sigma_1,$$
$$\varphi\sigma_1 = h\sigma_1 + f\rho_1.$$

Opérons par $S\sigma_1$ et $S\rho_1$, nous obtenons

$$S\sigma_1\varphi\rho_1 = hS\rho_1\sigma_1 - f\sigma_1^2,$$
$$S\rho_1\varphi\sigma_1 = hS\sigma_1\rho_1 + f\rho_1^2.$$

Mais φ étant un *tenseur*, les deux premiers membres sont égaux, d'où

$$f(\sigma_1^2 + \rho_1^2) = 0 \qquad \text{ou} \qquad f = 0.$$

Les racines sont donc réelles.

---

[1] *Voir* une Note importante, n° 118.

107. **Résolution de l'équation vectorielle du premier degré.** — L'équation d'Hamilton résout le problème général de la résolution de l'équation vectorielle du premier degré par rapport à un vecteur inconnu ρ. Soit, en effet,

$$\varphi\rho = \delta$$

cette équation. On obtiendra ρ par l'opération

$$\rho = \varphi^{-1}\delta,$$

et il suffit de calculer φ^{-1} au moyen de l'équation (H). Nous allons donner un exemple de cette façon de procéder, en choisissant à dessein un exemple dans lequel certains coefficients s'annulent.

Soit l'équation

$$V\alpha\rho = \beta,$$

où α et β sont des vecteurs constants. Il est clair que cette équation ne peut exister que si on a la condition

$$S\alpha\beta = 0.$$

Car on a $S\alpha\beta = S\alpha V\alpha\rho = 0$, quel que soit ρ. Cette condition imposée étant supposée remplie, on remarque que le scalar de $\alpha.\rho$ reste indéterminé. Posons donc

$$S\alpha\rho = x,$$

x étant un scalar arbitraire, nous aurons

$$\alpha.\rho = x + \beta;$$

d'où

$$\rho = \alpha^{-1}(x - \beta).$$

Telle est la solution générale de l'équation proposée.

Employons la méthode générale d'Hamilton et calculons les coefficients m, m_1, m_2 en prenant par exemple $\lambda = \alpha$, $\mu = \beta$, $\nu = V\alpha\beta = \alpha.\beta$ (puisque $S\alpha\beta = 0$).

Nous obtenons alors

$$\varphi\alpha = V\alpha\alpha = 0,$$
$$\varphi\beta = V\alpha\beta = \alpha\beta,$$
$$\varphi V\alpha\beta = V\alpha V\alpha\beta = \beta\alpha^2.$$

On trouve sans difficulté

$$m = 0, \qquad m_1 = -\alpha^2, \qquad m_2 = 0.$$

de sorte que la cubique (G) devient

$$\varphi^3 - \alpha^2\varphi = 0,$$

c'est-à-dire qu'on a, *quel que soit* ρ,

$$\varphi^3\rho - \alpha^2\varphi\rho = 0,$$

ce qui se vérifie immédiatement par un calcul direct.

Opérons sur les deux membres par φ^{-1}, nous obtenons l'identité

$$\varphi^2\rho - \alpha^2\rho = \varphi^{-1}(0).$$

Remarquons que $\varphi^{-1}(0)$ doit être vecteur σ tel qu'on a

$$\varphi^{-1}(0) = \sigma \qquad \text{ou} \qquad \varphi\sigma = 0,$$

c'est-à-dire

$$V\alpha\sigma = 0,$$

ce qui donne

$$\sigma = -x\alpha,$$

x étant un scalar quelconque, et le signe — étant mis par convenance. D'où

$$\varphi^2\rho - \alpha^2\rho = -x\alpha.$$

Dans le *cas particulier* de l'équation proposée, on a

$$\varphi\rho = \beta, \qquad \text{d'où} \qquad \varphi^2\rho = \alpha\beta$$

et l'équation précédente devient

$$\alpha\beta - \alpha^2\rho = -x\alpha,$$

on en déduit donc

$$\rho = \alpha^{-1}(\beta + x),$$

solution identique à la précédente.

Traitons encore l'exemple suivant. Soit l'équation

$$\varphi\rho - V\alpha\rho\beta = \gamma.$$

Prenons comme vecteurs auxiliaires les vecteurs α, β, $V\alpha\beta$.

On aura

$$\varphi\alpha = \beta\alpha^2, \qquad \varphi\beta = \alpha\beta^2, \qquad \varphi V\alpha\beta = -V\alpha\beta S\alpha\beta.$$

Nous aurons alors sans difficulté

$$m = \alpha^2\beta^2 S\alpha\beta,$$
$$m_1 = -\alpha^2\beta^2,$$
$$m_2 = -S\alpha\beta.$$

L'équation (H) est ici

$$\alpha^2\beta^2 S\alpha\beta.\varphi^{-1} = -\alpha^2\beta^2 + S\alpha\beta.\varphi + \varphi^2;$$

d'où, en remarquant que $\rho = \varphi^{-1}\gamma$,

$$\rho.\alpha^2\beta^2 S\alpha\beta = -\alpha^2\beta^2 - V\alpha\gamma\beta S\alpha\beta + V\alpha(V\alpha\gamma\beta)\beta.$$

En développant le second membre on trouve, après quelques réductions,

$$\rho S\alpha\beta = \alpha^{-1}S\alpha\beta + \beta^{-1}S\beta\gamma - \gamma.$$

108. **Formes normales de la dyadique.** — Il existe, pour la dyadique générale d'une part et pour le tenseur de l'autre, deux formes dites *normales* dont l'emploi est assez souvent avantageux. Nous les donnons ci-dessous.

Théorème XI. — Une dyadique quelconque peut se mettre sous la forme

$$(1) \qquad ai'i + bj'j + ck'k.$$

a, b, c étant des scalars positifs ou négatifs et ijk, $i'j'k'$ deux *systèmes de vecteurs unités trirectangulaires.*

Nous avons vu, par le théorème I, qu'une dyadique peut se mettre sous la forme

$$(2) \qquad A\alpha;\ i + B\beta;\ j + C\gamma;\ k,$$

où i, j, k forment un triplet unitaire rectangulaire quelconque. Nous allons montrer que l'on peut choisir ce triplet de manière que le triplet α, β, γ soit aussi trirectangulaire.

Nous ferons d'abord une *remarque importante*. Une dyadique étant mise sous la forme

$$\varphi = \alpha;\ \lambda + \beta;\ \mu + \gamma;\ \nu,$$

où λ, μ, ν sont *unitaires* et *trirectangulaires*, si nous désignons par σ_λ, σ_μ et σ_ν les valeurs de $\sigma = \varphi\rho$ quand ρ prend successivement les positions λ, μ et ν, nous aurons

$$\sigma_\lambda = -\alpha, \qquad \sigma_\mu = -\beta, \qquad \sigma_\nu = -\gamma,$$

de sorte que la dyadique prend la forme

$$-(\sigma_\lambda;\ \lambda + \sigma_\mu;\ \mu + \sigma_\nu;\ \nu).$$

Ceci posé, et la dyadique devant être mise sous la forme (2), pre-

nons comme direction i une direction telle qu'en remplaçant ρ par i, le *module* de σ soit au moins aussi grand que pour toute autre direction de ρ. Soit σ_i la valeur de σ ainsi obtenue. Prenons alors comme direction j une direction située dans le plan perpendiculaire à i et telle que pour cette direction j le *module* de σ soit au moins aussi grand que pour toute autre direction de ρ parallèle à ce plan. Soit σ_j la direction de σ ainsi obtenue. La direction k est alors déterminée et donne pour σ une valeur σ_k. On peut alors mettre la dyadique sous la forme

$$\varphi = a\sigma_i;\ i - b\sigma_j;\ j + c\sigma_k;\ k;$$

$a\sigma_i$ désignent, par exemple, la valeur de σ qui correspond à $\rho = i$ et qui coïncide en direction avec le vecteur unité σ_i.

Il s'agit de démontrer que les vecteurs σ_i, σ_j, σ_k sont rectangulaires.

Or on a

$$d\sigma = \varphi\, d\rho = (a\sigma_i;\ i + b\sigma_j;\ j + c\sigma_k;\ k)\, d\rho.$$

Soit $\rho = i$. Alors σ est $\parallel$ à σ_i. Supposons que nous prenions $d\rho$ parallèle à j. On voit que $d\sigma$ sera parallèle à σ_j. Si nous prenons $d\rho$ parallèle à k, $d\sigma$ sera parallèle à σ_k. Mais à cause de la condition de maximum, σ_i est perpendiculaire à $d\sigma$ quel que soit $d\rho$. Par suite σ_i est perpendiculaire à σ_j et à σ_k. La condition de maximum imposée dans le plan perpendiculaire à i ferait voir de même que σ_j est perpendiculaire à σ_k [1].

Théorème XII. — Un *tenseur* peut se mettre sous la forme

$$ai;\ i + bj;\ j + ck;\ k,$$

où i, j, k est un triplet de vecteurs trirectangulaires.

Ce théorème résulte du précédent. Si φ est un tenseur, on a

$$\varphi = ai'i + bj'j + ck'k$$

et l'on doit avoir *quels que soient* ρ et σ

$$S\rho\varphi\sigma = S\sigma\varphi\rho$$

ou

$$aSi'\rho Si\sigma + \ldots = aSi'\sigma Si\rho + \ldots;$$

d'où l'on déduit

$$i = i', \qquad j = j', \qquad k = k'.$$

Remarque. — Il résulte de ce qui précède qu'une fonction linéaire

---

[1] Cette démonstration est empruntée à la *Vector Analysis* de Gibbs, n° 135.

ou une dyadique *est complètement déterminée quand on connaît les valeurs qu'elle prend pour trois valeurs rectangulaires de* ρ.

En particulier une dyadique est déterminée quand on connaît les trois directions principales et les valeurs que prend la fonction $\varphi\rho$ pour trois vecteurs dirigés suivant ces directions.

Exercice. — Montrer que la dyadique

$$-(i'i + j'j + k'k)$$

a pour effet de faire tourner un vecteur ρ coniquement autour de l'axe k de l'angle θ compris entre i et i' dans le sens direct.

Cela résulte immédiatement de ce que le vecteur

$$\rho = ix + jy + kz$$

devient

$$(i'Si\rho + j'Sj\rho + k'Sk\rho) = i'x + j'y + k'z.$$

L'expression ci-dessus représente donc un *verseur*. Mais les calculs relatifs aux rotations sont généralement plus simples au moyen des verseurs d'Hamilton qu'au moyen des dyadiques.

109. Nous savons par ce qui précède qu'une fonction σ est complètement déterminée lorsque l'on connaît les valeurs σ_i, σ_j, σ_k qu'elle prend pour les trois valeurs i, j, k de ρ, et qu'on a alors

$$(1) \qquad \varphi = -(\sigma_i i + \sigma_j j + \sigma_k k).$$

Ceci est un fait général, mais dans le cas particulier où la fonction est un *tenseur*, la fonction jouit de la propriété remarquable suivante. On peut dans l'expression (1) permuter entre eux les deux groupes de vecteurs i, j, k et $\sigma_i \sigma_j \sigma_k$, c'est-à-dire que l'on a aussi

$$(2) \qquad \varphi = -(i\sigma_i + j\sigma_j + k\sigma_k).$$

En effet, soient σ, ρ et σ', ρ' deux groupes correspondants de valeurs de σ et de ρ. On a pour un tenseur

$$(3) \qquad \sigma\rho' = \sigma'\rho,$$

propriété caractéristique du tenseur. Soient s_1, s_2, s_3 les composantes scalaires de σ suivant i, j, k. On aura

$$\sigma = s_1 i + s_2 j + s_3 k.$$

Posons dans (3) $\rho' = i$. Il vient

$$\sigma i = \sigma_i \rho.$$

Mais, d'après l'expression de σ, on a $\sigma i = -s_1$. On a donc

$$\sigma = -(i\sigma_i + j\sigma_j + k\sigma_k)\rho,$$

ce qui est l'expression (2).

L'équation générale (1) définit donc un tenseur avec la condition (2). On peut donner à cette condition d'autres expressions. On a, par exemple,

$$V\rho V i\sigma_i = \sigma_i(i\rho) - i(\sigma_i\rho)$$

et par (1) et (2)

$$V\rho V(i\sigma_i + j\sigma_j + k\sigma_k) = 0$$

ou bien, puisque ρ est quelconque,

$$(4) \qquad V(i\sigma_i + j\sigma_j + k\sigma_k) = 0.$$

Remarque. — Lorsque la fonction linéaire autoconjuguée est sous la forme

$$\varphi = aii + bjj + ckk,$$

on remarque que l'on a

$$(5) \qquad \varphi^{-1} = \frac{1}{a}ii + \frac{1}{b}jj + \frac{1}{c}kk.$$

110. Nous reportant au n° **101**, nous voyons qu'une dyadique de la forme

$$\varphi = -(\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma'),$$

où α, β, γ sont trois vecteurs quelconques, et α', β', γ' le système de *vecteurs réciproques* jouit de la propriété que l'on a, quel que soit le vecteur ρ,

$$\varphi\rho = \rho, \qquad \rho\varphi = \rho.$$

Gibbs désigne par la lettre I une dyadique jouissant de cette propriété et lui donne le nom de *idemfacteur* (*Vector Analysis*, n° **124**). Il pose donc

$$-(\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma') = \mathrm{I}.$$

En multiplication scalar avec un vecteur ou une autre dyadique un idemfacteur se comporte comme le nombre $+1$. Il est facile, en effet, de voir par un calcul direct très simple que, si l'on a une dyadique quelconque

$$\psi = \lambda\lambda_1 + \mu\mu_1 + \nu\nu_1,$$

on aura les formules

$$\mathrm{I}\psi = \psi\mathrm{I} = \psi.$$

Mais il n'en est plus de même en multiplication *vectorielle*. Gibbs

appelle produit *vectoriel* (Skew product) d'une dyadique et d'un vecteur les expressions

$$\varphi \times \rho \quad \text{et} \quad \rho \times \varphi,$$

c'est-à-dire que si l'on a

$$\varphi = \alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu,$$

on pose

$$\varphi \times \rho = V(\alpha V\lambda\rho + \beta V\lambda\rho + \gamma V\nu\rho),$$
$$\rho \times \varphi = V(V\rho\alpha.\lambda + V\rho\beta.\mu + V\rho\gamma.\nu).$$

Il est clair que l'on n'a pas ici

$$I \times \rho = \rho \times I.$$

Il est donc nécessaire, dans le Calcul de Gibbs de conserver trace de la dyadique I, tandis que nous pouvons la remplacer par l'unité parce que nous n'employons que la multiplication dyadique scalaire.

C. — Surfaces du second ordre à centre.

111. Une équation scalar du second degré en ρ est de la forme

$$\Sigma S a\rho b\rho c = d,$$

où a, b, c sont des quaternions constants et d un scalar constant. En décomposant a, b, c en leurs parties scalaires et vectorielles, on mettra facilement cette équation sous la forme

$$2\Sigma S\alpha\rho S\beta\rho + A\rho^2 + 2S\gamma\rho = C,$$

où α, β sont des vecteurs constants et A et C des scalars connus. Portons l'origine au point $O + \delta$, ρ devient $\rho_1 + \delta$ et l'équation prend la forme

$$2\Sigma S\alpha\rho S\beta\rho + A\rho^2 + 2\Sigma(S\alpha\rho S\beta\delta + S\beta\rho S\alpha\delta) + 2AS\delta\rho$$
$$+ 2S\gamma\rho + 2\Sigma S\alpha\delta S\beta\delta + A\delta^2 + 2S\gamma\delta - C = 0.$$

Nous ferons disparaître la première puissance de ρ en posant

$$\Sigma(\alpha S\beta\delta + \beta S\alpha\delta) + A\delta + \gamma = 0,$$

équation du premier degré en δ qui donne pour δ une valeur déterminée si, comme nous le supposons, la surface est à centre.

L'équation devient alors

$$2\Sigma S\alpha\rho S\beta\rho + A\rho^2 = D,$$

supposons $D \neq 0$ (si $D = 0$, la surface représente un cône), nous pourrons écrire

$$2\Sigma S\alpha'\rho . S\beta'\rho + h\rho^2 = 1;$$

d'où par différentiation (en supprimant les accents)

$$S\, d\rho \,\{\Sigma(\alpha S\beta\rho - \beta S\alpha\rho) + h\rho\} = 0.$$

Posons

$$(1) \qquad \varphi\rho = \Sigma(\alpha S\beta\rho - \beta S\alpha\rho) + h\rho.$$

Ce qui montre que $\varphi\rho$ est une *fonction linéaire autoconjuguée*. L'équation des surfaces à centre prend la forme

$$(2) \qquad S\rho\varphi\rho = 1 \ (^1).$$

112. Plan tangent. Directions conjuguées. — Soit ρ un point de la surface et soit ϖ le vecteur courant. En différentiant l'équation (2) nous avons, puisque φ est autoconjuguée,

$$0 = S\rho\varphi\, d\rho = S\, d\rho\varphi\rho.$$

Par suite, si $\varpi - \rho$ est un vecteur du plan tangent, on a ($\varpi - \rho$ étant parallèle à $d\rho$)

$$S(\varpi - \rho)\varphi\rho = 0$$

ou à cause de (2)

$$(1) \qquad S\varpi\varphi\rho = 1$$

pour l'équation du plan tangent au point P (ρ).

Posons avec Hamilton

$$\varphi\rho = \nu.$$

La distance δ de l'origine au plan tangent s'obtient en posant $\varpi = x\nu$, car ν est normal à ce plan; on en tire

$$\delta = \nu^{-1} = (\varphi\rho)^{-1}.$$

Le vecteur $\nu^{-1} = (\varphi\rho)^{-1}$, qu'il ne faut pas confondre avec $\varphi^{-1}\rho$, s'appelle *vecteur de proximité* (Hamilton).

Considérons les cordes menées d'un point à un autre de la surface parallèlement à une direction donnée α et cherchons le lieu du point milieu de ces cordes.

---

(1) Nous avons pris comme guide dans une bonne partie de cet article C, le Chapitre VIII du *Traité élémentaire des Quaternions* de Tait, traduit par Plarr (Paris, Gauthier-Villars, 1882-1884).

Soit ϖ ce point. Les deux points $\varpi \pm \varepsilon\alpha$ étant sur la surface, on a

$$S(\varpi \pm \varepsilon\alpha)\varphi(\varpi \pm \varepsilon\alpha) = 1,$$

ce qui donne les deux équations

$$S\varpi\varphi\varpi + \varepsilon^2 S\alpha\varphi\alpha + 2\varepsilon S\varpi\varphi\alpha = 1,$$
$$S\varpi\varphi\varpi + \varepsilon^2 S\alpha\varphi\alpha - 2\varepsilon S\varpi\varphi\alpha = 1;$$

d'où l'on tire

$$S\varpi\varphi\alpha = 0.$$

Le lieu du point ϖ est donc *un plan* perpendiculaire à $\varphi\alpha$ et passant par le centre de la surface. Or $\varphi\alpha$ est perpendiculaire au plan tangent au point où α perce la surface. Donc, le lieu des milieux des cordes parallèles à une direction donnée, et qu'on appelle *plan diamétral* de cette direction, est parallèle au plan tangent à l'extrémité du vecteur central parallèle à cette direction.

Réciproquement, soit β une valeur quelconque de ϖ, c'est-à-dire un vecteur du plan diamétral. On aura

$$S\beta\varphi\alpha = 0 \qquad \text{ou} \qquad S\alpha\varphi\beta = 0,$$

c'est-à-dire que α est dans le plan diamétral de la direction β. Les deux plans diamétraux relatifs à α et β ont pour équations

$$S\varpi\varphi\alpha = 0,$$
$$S\varpi\varphi\beta = 0,$$

leur intersection γ est parallèle au vecteur $V\varphi\alpha\varphi\beta = \gamma$ et l'on a

$$0 = S\gamma\varphi\alpha = S\alpha\varphi\gamma,$$
$$0 = S\gamma\varphi\beta = S\beta\varphi\gamma,$$
$$0 = S\beta\varphi\alpha = S\alpha\varphi\beta,$$

de sorte que les trois directions α, β, γ sont *conjuguées*, le plan diamétral de chacune de ces directions contenant les deux autres. On a ainsi une infinité de systèmes de *diamètres conjugués*.

Nous allons montrer qu'il existe toujours au moins un système de trois directions conjuguées *réelles* qui forment un triplet orthogonal.

On appelle ces directions *directions principales*.

Nous savons qu'il existe des directions de ρ que l'opérateur φ ne modifie pas. Soit ρ_1 une de ces directions.

Le plan diamétral correspondant à cette direction est

$$S\varpi\varphi\rho_1 = S\varpi g\rho_1 = gS\varpi\rho_1 = 0.$$

Il est donc perpendiculaire à ρ_1. Il nous suffit alors de montrer

que la cubique en g relative à φ a ses trois racines réelles. Or ceci a déjà été démontré dans le cas où φ est un tenseur (n° 106), ce qui est précisément le cas de la fonction φ de l'équation (2) du n° 111.

On sait également (n° 106, VIII) que dans ce cas, à des racines inégales de l'équation en g correspondent deux directions rectangulaires entre elles. Il en résulte donc que la surface [n° 111, (2)] a généralement trois directions principales rectangulaires entre elles.

Il peut arriver que *deux des racines* de la cubique en g soient *égales*. On sait alors (n° 106, VII) qu'à la racine double correspondent toutes les directions d'un plan. A la racine simple correspond une direction particulière qui est évidemment perpendiculaire au plan précédent, puisqu'elle est perpendiculaire (n° 106, VIII) à chacune des directions de ce plan. On voit donc que l'on a, dans ce cas, une infinité de triplets de diamètres conjugués rectangulaires entre eux, l'un des diamètres correspondant à la racine simple et les deux autres étant deux directions rectangulaires quelconques du plan ci-dessus.

Par un raisonnement tout semblable, on verrait que si la cubique en g a *une racine triple*, tout triplet orthogonal de l'espace forme un système de diamètres conjugués.

Ces résultats correspondent à des propriétés bien connues des quadriques. Lorsque les trois racines sont inégales, la surface est quelconque; lorsque deux racines sont égales, la surface est de révolution. Enfin, s'il y a une racine triple, la surface est une sphère.

Les directions principales percent la surface en des points deux à deux symétriques par rapport au centre et les modules des distances de ces points deux à deux s'appellent les *axes* de la surface. On représente habituellement les longueurs des *demi-axes* par les lettres a, b, c. L'une au moins de ces valeurs est réelle puisque la cubique en g a au moins une racine réelle. Si ρ_1 est une direction principale, on a

$$S\rho_1\varphi\rho_1 = 1 \qquad \text{ou} \qquad g_1 a^2 = -1,$$

de sorte que les racines de la cubique en g sont les inverses des carrés des demi-axes pris négativement et l'on a les équations

$$-m_2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2},$$

$$m_1 = \frac{1}{a^2 b^2} + \frac{1}{b^2 c^2} + \frac{1}{c^2 a^2},$$

$$-m = \frac{1}{a^2 b^2 c^2}.$$

La fonction φ étant un tenseur doit pouvoir se mettre sous la forme

$$\varphi = \mathrm{A}ii + \mathrm{B}jj + \mathrm{C}kk.$$

Or en calculant les valeurs des coefficients m_2, m_1, m par les formules du n° **105**, on trouve

$$m_2 = -(\mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C}),$$
$$m_1 = \mathrm{AB} + \mathrm{BC} + \mathrm{CA},$$
$$m = -\mathrm{ABC},$$

on a donc

$$\mathrm{A} = \frac{1}{a^2}, \qquad \mathrm{B} = \frac{1}{b^2}, \qquad \mathrm{C} = \frac{1}{c^2}$$

et par suite

$$\varphi = \frac{ii}{a^2} + \frac{jj}{b^2} + \frac{kk}{c^2}$$

et par suite (n° **109**, *Rem.*)

$$\varphi^{-1} = a^2 ii + b^2 jj + c^2 kk$$

en supprimant le signe ;

L'équation en g du tenseur sous la forme précédente est donc

$$g^3 - (\mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C})g^2 + (\mathrm{AB} + \mathrm{BC} + \mathrm{CA})g + \mathrm{ABC} = 0$$

ou

$$g^3 - \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)g^2 - \left(\frac{1}{a^2 b^2} + \frac{1}{b^2 c^2} + \frac{1}{c^2 a^2}\right)g - \frac{1}{a^2 b^2 c^2} = 0.$$

Remarque. — Les calculs précédents ne présentent aucune difficulté si l'on applique les formules du n° **105**, mais ils se présentent plus simplement encore si l'on transforme l'expression de la cubique en g relative à la forme de φ

$$\varphi = \alpha ; \lambda + \beta ; \mu + \gamma : \nu.$$

Exprimons que g est parallèle à $\varphi\rho$. On peut poser

$$-\rho = \alpha(\alpha'\rho) + \beta(\beta'\rho) + \gamma(\gamma'\rho)$$

et l'équation

$$\varphi\rho = g\rho$$

devient alors

$$\alpha S(\lambda - g\alpha')\rho + \beta S(\mu + g\beta')\rho + \gamma S(\nu - g\gamma')\rho = 0,$$

équation qui ne peut avoir lieu que si les coefficients de α, β, γ sont séparément nuls ou

$$(\lambda + g\alpha')\rho = 0,$$
$$(\mu - g\beta')\rho = 0,$$
$$(\nu - g\gamma')\rho = 0.$$

ρ doit donc être perpendiculaire aux trois vecteurs $\lambda + g\alpha'$... et par suite ces vecteurs sont coplanaires, ce qui donne

$$S(\lambda + g\alpha')(\mu + g\beta')(\nu + g\gamma') = 0;$$

d'où la cubique en g

$$\begin{aligned} g^3 S\alpha'\beta'\gamma' + g^2 S(\lambda\beta'\gamma' + \mu\gamma'\alpha' + \nu\alpha'\beta') \\ + gS(\alpha'\mu\nu + \beta'\nu\lambda + \gamma'\lambda\mu) + S\lambda\mu\nu = 0. \end{aligned}$$

Multiplions par $S\alpha\beta\gamma$ et remarquons que

$$S\alpha\beta\gamma S\alpha'\beta'\gamma' = 1, \qquad S\alpha\beta\gamma . S\lambda\mu\nu = -|\varphi|,$$
$$V\beta'\gamma' = -\alpha S\alpha'\beta'\gamma',$$
$$V\mu\nu = -\lambda' S\lambda\mu\nu,$$

il viendra

$$g^3 - g^2 S(\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma) + g|\varphi| S(\alpha'\lambda' + \beta'\mu' + \gamma'\nu') - |\varphi| = 0.$$

Si nous désignons par φ_s le premier invariant scalar d'une fonction linéaire (n° 99), nous aurons

$$S(\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu) = \varphi_s,$$
$$S(\alpha'\lambda' + \beta'\mu' + \gamma'\nu') = \varphi_s^{\,1}$$

et l'équation en g prend la forme

$$g^3 - g^2\varphi_s - g|\varphi|\varphi_s^{\,1} - |\varphi| = 0.$$

Cette forme de la cubique donne immédiatement les résultats précédents.

113. Surfaces homothétiques. — Considérons l'équation

$$(1) \qquad S\rho\varphi\rho = h,$$

où h est une constante quelconque positive ou négative. Si l'on pose

$$(2) \qquad \varphi = Aii + Bjj + Ckk.$$

Nous voyons que les demi-longueurs des axes de la surface sont $\frac{1}{\sqrt{\frac{A}{h}}}, \ldots$, ou bien $\sqrt{\frac{h}{A}}, \sqrt{\frac{h}{B}}, \sqrt{\frac{h}{C}}$, c'est-à-dire qu'elles sont proportionnelles aux demi-longueurs des axes de la surface

$$(3) \qquad S\rho\varphi\rho = 1.$$

L'équation (1) représente donc des *surfaces homothétiques* à la

surface (3). En considérant comme *points correspondants* des points situés sur une même droite issue du centre commun des surfaces, on voit que :

1° *Les plans tangents* aux points correspondants (ρ et $\rho\sqrt{h}$) sont *parallèles;*

2° *Les vecteurs de proximité* correspondants sont ϵ^{-1} et $\sqrt{h}\nu^{-1}$, où $\nu = \varphi\rho$, ρ étant le vecteur du point P sur la surface (1) (c'est-à-dire que $S\rho\varphi\rho = h$ et non $= 1$).

Il résulte de la remarque du n° 112 que l'équation cartésienne de la surface $S\rho\varphi\rho = 1$ est

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1,$$

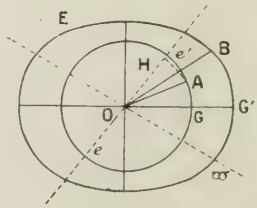
quand elle est rapportée à ses axes, les carrés de leurs demi-longueurs étant alors des inverses de A, B, C. La nature de la surface dépend alors des signes de ces coefficients.

114. Quand on suppose que A, B, C sont tous trois positifs (ce qui doit avoir lieu si x, y, z ne peuvent devenir infinis), la surface est un ellipsoïde que l'on appelle *ellipsoïde du tenseur*, et qui définit complètement celui-ci, puisqu'il fait connaître les trois coefficients A, B, C. On exprime ce fait en disant que le facteur

$$\varphi = \alpha\lambda - \beta\mu - \gamma\nu,$$

où φ est supposée *autoconjuguée*, est un *ellipsoïde* (plus généralement une surface à centre du second degré). Cette façon de parler signifie que l'on considère (*fig.* 41) tous les vecteurs tels que OA, issus d'une origine O et dont le module est, par exemple, égal à

Fig. 41.



l'unité, l'opérateur φ agissant sur ces vecteurs ρ donne comme résultats les vecteurs

$$\sigma = OB = \varphi\rho$$

et si φ est une fonction autoconjuguée, le lieu du point B, ainsi obtenu, est un ellipsoïde

$$S\tau\varphi\tau = 1.$$

En d'autres termes, *une sphère est transformée en un ellipsoïde.* Les axes de l'ellipsoïde sont les directions telles que OG de la sphère, que φ ne modifie pas. Nous savons qu'il y en a au moins trois rectangulaires entre elles.

On peut dire alors que l'ellipsoïde E *représente* la fonction ou *le tenseur* φ.

L'effet de la fonction φ est beaucoup plus complexe lorsque φ n'est pas un tenseur. On a, dans ce cas,

$$\tau = \varphi\rho = \psi\rho - V\varepsilon\rho,$$

ψ étant un tenseur et ε un vecteur indépendant de ρ, mais qui varie suivant la nature de la fonction φ. Le vecteur final τ se compose donc de deux composantes :

1° $\psi\rho$, c'est-à-dire le vecteur du point correspondant de l'ellipsoïde du tenseur ψ;

2° Un vecteur $V\varepsilon\rho$ parallèle au plan $S\varpi\varepsilon = 0$ [plan ϖ (*fig.* 41)] et dont le module est égal à $e \times$ AH, en désignant par e le module de ε. Ce vecteur est d'ailleurs perpendiculaire à ρ et à ε. Sa grandeur ne dépend que de la distance OH, mais sa direction varie en chaque point, car il est normal à HA. Aux points qui correspondent aux points ee', où le vecteur ε perce la sphère unité, il est nul. La surface ainsi obtenue peut être fort compliquée. Elle se simplifie dans le cas de déplacements très petits et devient alors un ellipsoïde (*cf.* n° 170).

115. Surfaces homofocales. — Considérons une surface du second ordre à centre

$$(1) \qquad \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = 1.$$

On sait que l'équation

$$(2) \qquad \frac{x^2}{A+\lambda} + \frac{y^2}{B+\lambda} + \frac{z^2}{C+\lambda} = 1,$$

où λ est un paramètre variable, représente une famille de surfaces homofocales à la première, car la différence des carrés des axes est

constante. Or, si nous posons

$$\varphi = \mathrm{A}\,ii + \mathrm{B}\,jj + \mathrm{C}\,kk,$$

nous avons (n° 109)

$$\varphi^{-1} = \frac{1}{\mathrm{A}}\,ii + \frac{1}{\mathrm{B}}\,jj + \frac{1}{\mathrm{C}}\,kk.$$

Par suite, l'équation

$$\mathrm{S}\,\rho(\varphi + \lambda)^{-1}\rho = 1$$

représente les surfaces confocales de la surface

$$\mathrm{S}\,\rho\varphi^{-1}\rho = 1.$$

Deux surfaces homofocales se coupent à angle droit. — Soient deux surfaces déterminées par les valeurs λ et λ' du paramètre. Les plans tangents en un point ρ commun à ces surfaces seront

$$\mathrm{S}\,\varpi(\varphi + \lambda)^{-1}\rho = 0,$$
$$\mathrm{S}\,\varpi(\varphi - \lambda')^{-1}\rho = 0.$$

Les normales seront donc $(\varphi - \lambda)^{-1}\rho$ et $(\varphi + \lambda')^{-1}\rho$, et si les surfaces sont rectangulaires, nous aurons

$$0 = \mathrm{S}(\varphi + \lambda)^{-1}\rho(\varphi + \lambda')^{-1}\rho = \mathrm{S}\,\rho(\varphi - \lambda')^{-1}(\varphi + \lambda)^{-1}\rho.$$

Or on a, en effet, en remarquant que les dyadiques $\varphi + \lambda$ et $\varphi' + \lambda$ sont homologues (n° **102**) :

$$\begin{aligned}(\varphi - \lambda)^{-1}(\varphi + \lambda')^{-1} &= \frac{1}{(\varphi - \lambda') - (\varphi + \lambda)}\left[(\varphi + \lambda)^{-1} - (\varphi + \lambda')^{-1}\right] \\ &= \frac{1}{\lambda - \lambda'}\left[(\varphi + \lambda)^{-1} - (\varphi + \lambda')^{-1}\right]\end{aligned}$$

et par suite le produit scalaire des normales sera

$$= \frac{1}{\lambda - \lambda'}\left(\underbrace{\mathrm{S}\,\rho(\varphi + \lambda)^{-1}\rho}_{=0} - \underbrace{\mathrm{S}\,\rho(\varphi + \lambda')^{-1}\rho}_{=0}\right) = 0, \qquad \text{car} \qquad \lambda \neq \lambda'.$$

116. Sections circulaires. — Une surface du second ordre à centre a *deux plans* de *sections circulaires* ou *plans cycliques*. On peut le faire voir par une transformation de l'équation $\mathrm{S}\rho\varphi\rho = 1$ sous une nouvelle forme appelée par Hamilton *forme cyclique* (*E*, **407**, 20 et suiv.). Soient i, j, k les racines de l'équation

$$\mathrm{V}\rho\varphi\rho = 0$$

où φ est un tenseur, c'est-à-dire les valeurs de ρ que l'opération φ

laisse inchangées. Les racines de la cubique en g sont (n° 112) $-A$, $-B$, $-C$ et les directions i, j, k sont les directions des axes de la surface $S\rho\varphi\rho = 1$. Supposons $A \leqq B \geqq C$ et cherchons à déterminer des coefficients f, h, e de manière que l'on ait

$$\varphi\rho = f\rho + hV(i+ek)\rho(i-ek)$$

ou

$$AiSi\rho + BjSj\rho - CkSk\rho = f\rho + hV(i+ek)\rho(i-ek).$$

Remplaçons ρ par $-iSi\rho - jSj\rho - kSk\rho$ dans le second membre et égalons les coefficients de i, j, k dans les deux membres. Nous aurons

$$\begin{aligned} A &= -f + h(1+e^2), \\ B &= -f - h(1-e^2), \\ C &= -f - h(1+e^2); \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$h = \frac{1}{2}(A-B), \qquad e^2 = \frac{B-C}{A-B}, \qquad f = -\frac{1}{2}(A+C).$$

La transformation est donc possible et nous pouvons poser

$$\varphi\rho = f\rho + V\lambda\rho\mu.$$

Dans cette formule, le produit des modules des vecteurs λ et μ qui sont également inclinés sur le grand axe est déterminé, mais leur valeur séparée ne l'est pas.

Remplaçons $\varphi\rho$ par cette valeur dans l'équation de la surface, nous obtenons la *forme cyclique*

$$2S\lambda\rho S\mu\rho + (f - S\lambda\mu)\rho^2 = 1.$$

Il suit de là que les plans perpendiculaires à λ et μ coupent la surface suivant des cercles, car si nous coupons la surface par un plan perpendiculaire à λ, par exemple, $S\lambda\rho = m$, l'équation devient

$$(f - S\lambda\mu)\rho^2 + 2mS\mu\rho = 1,$$

équation d'une sphère (75).

Deux sections circulaires de systèmes différents (c'est-à-dire l'une normale à λ et l'autre à μ) sont toujours sur une même sphère, car si nous coupons la surface par les plans

$$S\lambda\rho = m, \qquad S\mu\rho = n,$$

nous avons

$$(f - S\lambda\mu)\rho^2 = 1 - 2mn,$$

équation d'une sphère.

EXERCICES ET NOTES SUR LE CHAPITRE IX.

117. I. *Soit le quaternion*

$$q = \alpha\varphi\alpha + \beta\varphi\beta - \gamma\varphi\gamma,$$

où α, β, γ *sont trois vecteurs unités trirectangulaires, et* φ *une fonction linéaire quelconque. Montrer que l'on a*

$$\varphi\rho = \varphi'\rho - V\varepsilon\rho$$

et qu'on a alors

$$Sq = -m_2, \qquad Vq = 2\varepsilon.$$

Car on a

$$\alpha = \beta\gamma, \qquad \beta = \gamma\alpha, \qquad \gamma = \alpha\beta,$$

et en appliquant la formule [n° 105, (1)] on a bien

$$Sq = -m_2.$$

On a, d'autre part, par (104, IV),

$$\frac{1}{2}(\varphi - \varphi')\rho = V\varepsilon\rho.$$

D'autre part, en écrivant

$$q = \beta\gamma\varphi\alpha - \gamma\alpha\varphi\beta + \alpha\beta\varphi\gamma,$$

on a, en appliquant la formule [n° 65, (1)] qui donne le vecteur d'un produit triple et tenant compte que α, β, γ sont rectangulaires,

$$Vq = (\beta S\gamma\varphi\alpha - \gamma S\beta\varphi\alpha) + (\gamma S\alpha\varphi\beta - \alpha S\gamma\varphi\beta) + (\alpha S\beta\varphi\gamma - \beta S\alpha\varphi\gamma).$$

Remplaçons, dans les termes affectés du signe —, φ par $\varphi' - V\varepsilon$ et remarquant que $S\gamma\varphi\alpha = S\alpha\varphi'\gamma$, ..., on trouve immédiatement

$$\frac{1}{2}Vq = -\alpha S\alpha\varepsilon - \beta S\beta\varepsilon - \gamma S\gamma\varepsilon = \varepsilon,$$

on en déduit donc

$$q = -m_2 - 2\varepsilon.$$

II. *Montrer que si* λ, μ, ν *sont trois vecteurs quelconques non coplanaires, on a*

$$q = V\mu\nu.\varphi\lambda + V\nu\lambda.\varphi\mu + V\lambda\mu.\varphi\nu = (m_2 - 2\varepsilon)S\lambda\mu\nu,$$

où $V\varepsilon\rho$ *est la partie non commutative de* $\varphi\rho$ (*E*. 349).

On a, en effet,

$$Sq = SV\mu\nu.\varphi\lambda + \ldots = m_2 S\lambda\mu\nu.$$

D'après l'énoncé, on a de plus, *ici*,

$$\varphi\rho = \frac{1}{2}(\varphi - \varphi')\rho + V\varepsilon\rho \quad \text{ou} \quad (\varphi - \varphi')\rho = 2V\varepsilon\rho,$$

on a alors

$$Vq = (-\nu S\mu\varphi\lambda - \mu S\nu\varphi\lambda) + (-\ldots) + (\ldots).$$

Remplaçons $\varphi\lambda$ par $\varphi'\lambda + 2V\varepsilon\lambda$,

$$Vq = (-\nu S\mu\varphi\lambda - \mu S\nu\varphi'\lambda + 2\mu S\nu\varepsilon\lambda) + \ldots,$$

ce qui donne facilement

$$Vq = -2\varepsilon S\lambda\mu\nu.$$

III. *Soit une surface du second ordre*

$$S\rho\varphi\rho = 1.$$

Si nous appelons *cône asymptote* de la surface le cône qui a pour équation

$$S\rho\varphi\rho = 0,$$

montrer que les *génératrices rectilignes* qui passent en un point de la surface sont parallèles aux droites d'intersection de ce cône et d'un plan mené par l'origine parallèlement au plan tangent à la surface au point considéré.

Soit $\varpi = \rho + z\alpha$ une génératrice rectiligne passant par le point de la surface, on doit avoir

$$S(\rho + z\alpha)\varphi(\rho + z\alpha) = 0$$

quel que soit z, ce qui exige

$$S\alpha\varphi\rho = 0, \qquad S\alpha\varphi\alpha = 0.$$

IV. *Condition pour que la surface*

$$S\rho\varphi\rho = 1$$

soit *de révolution* autour de l'axe α.

Il suffit d'exprimer que la normale à la surface rencontre l'axe ou que les trois vecteurs α, ρ, $\varphi\rho$ sont coplanaires, ce qui donne la condition

$$S\alpha\rho\varphi\rho = 0.$$

V. *Trouver l'équation de la surface engendrée par une droite tournant autour d'un axe fixe* (hyperboloïde de révolution).

Soit θ l'angle constant de la droite avec l'axe. Le cône asymptote a pour équation

$$S\alpha U\rho = -\cos\theta,$$

α étant un vecteur unité suivant l'axe, ou bien

$$S\alpha\rho = -T\rho\cos\theta \qquad \text{ou} \qquad S^2\alpha\rho = T^2\rho\cos^2\theta = -\rho^2\cos^2\theta.$$

En posant

$$\varphi\rho = \alpha S\alpha\rho - \rho\cos^2\theta$$

et exprimant que la surface passe par le cercle de gorge de rayon r, on obtient

$$S\rho\varphi\rho = -r^2\cos^2\theta.$$

VI. *Montrer que si φ est une fonction linéaire autoconjuguée, on peut mettre $\varphi\rho$ sous la forme*

$$\varphi\rho = a\alpha V\alpha\rho + b\beta S\beta\rho,$$

où a et b sont des scalars et α et β des vecteurs unités (***E***, **358**).

La transformation du n° 99, IX, en remarquant que l'expression précédente s'écrit

$$\varphi\rho = -a\rho + b\beta S\beta\rho - a\alpha S\alpha\rho,$$

nous suggère de poser

$$\alpha = xi + zk, \qquad \beta = x'i + z'k.$$

Remplaçons ρ par sa valeur $-iSi\rho - \ldots$, on a alors l'équation

$$\begin{aligned} &AiSi\rho - BjSj\rho - CkSk\rho \\ &\quad = a(iSi\rho + jSj\rho - kSk\rho) - b(x'i - z'k)S(x'i + zk)\rho \\ &\qquad\qquad - a(xi + zk)\,S(xi + zk)\rho; \end{aligned}$$

d'où, en égalant les coefficients de i, j, k,

$$\begin{aligned} ASi\rho &= aSi\rho + bx'S(x'i + z'k)\rho - ax\,S(xi + zk)\rho, \\ B &= a, \\ CSk\rho &= aSk\rho + bz'\,S(x'i + z'k)\rho - az\,S(xi + zk)\rho, \end{aligned}$$

et comme ρ est quelconque, on a les équations

$$\begin{aligned} A &= a - bx'^2 - ax^2, \\ B &= a, \\ C &= a - bz'^2 - az^2; \\ axz &= bx'z', \end{aligned}$$

et en remarquant que

$$x^2 + y^2 = x'^2 + z'^2 = 1,$$

on aura

$$a = B, \qquad b = A - B - C.$$

Pour déterminer x et z par exemple, nous éliminerons x' entre la première des équations précédentes et la quatrième élevée au carré ou

$$a^2 x^2 (1 - x^2) = b^2 (1 - x'^2) x'^2,$$

ce qui donne sans difficulté

$$x^2 = \frac{C(A - B)}{B(A - C)} = \frac{A^{-1} - B^{-1}}{A^{-1} - C^{-1}} \qquad \text{et} \qquad z^2 = \frac{B^{-1} - C^{-1}}{A^{-1} - C^{-1}}.$$

La première équation donnera ensuite x'^2 et l'on en déduira z'^2 par l'équation

$$z'^2 = 1 - x'^2.$$

VII. *Montrer que l'équation*

$$S^2 \frac{\rho}{\alpha} - V^2 \frac{\rho}{\beta} = 1$$

représente un ellipsoïde (*L*, 432).

On remarque que cette équation résulte de l'élimination de x entre les deux équations

$$S \frac{\rho}{\alpha} = x, \qquad TV \frac{\rho}{\beta} = \sqrt{1 - x^2}$$

dont la première représente un plan perpendiculaire à α et la seconde un cylindre de révolution autour de β. La section est donc une ellipse. De plus, x doit être compris entre $+1$ et -1.

Si nous remarquons que q étant un quaternion quelconque

$$q = w + \rho,$$

on a

$$q . Kq = (Tq)^2$$

ou

$$Tq = \sqrt{q\,Kq} = \sqrt{(w - \rho)(w - \rho)} = \sqrt{w^2 - \rho^2},$$

nous voyons que l'on peut écrire cette équation

$$T\left(S \frac{\rho}{\alpha} + V \frac{\rho}{\beta}\right) = 1 \qquad (L,\ 436).$$

Hamilton tire de cette équation de nombreuses conséquences (*L*, 437 et suiv.).

VIII. *Trouver l'équation du cône du second degré ayant son sommet à l'origine et contenant cinq génératrices données.*

Soient α, β, γ, δ, ε les vecteurs donnés. En appliquant le théorème de Pascal, on aura

$$S\,V(V\alpha\beta V\delta\varepsilon)\,V(V\beta\gamma . V\varepsilon\rho)\,V(V\gamma\delta V\rho\alpha) = 0.$$

Il est clair que cette équation est un cône (indépendante de $T\rho$) du deuxième degré. L'équation est évidemment satisfaite par $\rho = \alpha$ et $\rho = \varepsilon$. On montrera aisément qu'elle est satisfaite pour $\rho = \beta$, γ ou δ.

IX. *Montrer qu'il existe dans deux surfaces du second ordre quelconques deux triplets de diamètres conjugués parallèles entre eux.*

Car, soient

$$S\rho\varphi\rho = 1 \qquad \text{et} \qquad S\rho\psi\rho = 1$$

les deux surfaces et α, β, γ les directions cherchées.

On a, par exemple,

$$\begin{matrix} S\alpha\varphi\beta = 0 \\ S\gamma\varphi\alpha = 0 \end{matrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{matrix} S\alpha\psi\beta = 0 \\ S\gamma\psi\alpha = 0 \end{matrix} \qquad \text{ou} \qquad \varphi\alpha \parallel \psi\beta \parallel V\beta\gamma.$$

Les directions cherchées satisfont donc à l'équation

$$S\varphi\rho\psi\rho = 0 \qquad (\text{Tait, } 266).$$

118. Note sur l'équation (H) d'Hamilton. — L'équation

$$\Phi = \varphi^3 - m_2\varphi^2 - m_1\varphi - m = 0,$$

déduite de la théorie des transformations linéaires, est tout à fait générale. Nous en déduisons par les règles ordinaires du calcul algébrique

$$(1) \qquad m = m_1\varphi - m_2\varphi^2 - \varphi^3.$$

Pour tirer de là l'équation (H), nous opérons sur les deux membres par φ^{-1}, ce qui nous donne

$$(\mathrm{H}) \qquad m\varphi^{-1} = m_1 - m_2\varphi + \varphi^2,$$

c'est-à-dire l'équation (H). Mais il y a lieu de remarquer que nous supposons ainsi implicitement que m est $\neq 0$. Si, en effet, nous avons $m = 0$, l'équation (1) devient

$$0 = m_1\varphi - m_2\varphi^2 + \varphi^3 = \varphi(m_1 - m_2\varphi + \varphi^2)$$

et, en opérant par φ^{-1},

$$(2) \qquad \varphi^{-1}(0) = m_1 - m_2\varphi + \varphi^2.$$

Or, il arrivera précisément que si m est nul, $\varphi^{-1}(0)$ sera en général $\neq 0$, ainsi qu'on le voit immédiatement.

Posons, en effet,

$$\varphi\rho = \alpha S\lambda\rho + \beta S\mu\rho + \gamma S\nu\rho.$$

L'équation

$$(3) \qquad \varphi\rho = 0$$

ne peut être satisfaite, si α, β, γ ne sont pas coplanaires, que si l'on a

$$S\lambda\rho = 0, \qquad S\mu\rho = 0, \qquad S\nu\rho = 0,$$

c'est-à-dire par $\rho = 0$ si λ, μ, ν ne sont pas coplanaires. Il en résulte que si α, β, γ ou λ, μ, ν ne sont pas coplanaires, l'équation (3) n'a pas d'autre solution que $\rho = 0$. On a donc alors

$$\varphi(0) = 0, \qquad \text{d'où} \qquad 0 = \varphi^{-1}(0),$$

et, dans ce cas, on a d'ailleurs (n° 67, XII)

$$m = -S\alpha\beta\gamma S\lambda\mu\nu = 0.$$

Mais si α, β, γ ou λ, μ, ν sont coplanaires, on a

$$m = 0,$$

et alors la fonction $\varphi\rho$ *se réduit à deux termes*, car on peut exprimer γ en fonction linéaire de α et β ou ν en fonction linéaire de λ et μ.

On a donc alors

$$\varphi\rho = \alpha S\lambda\rho + \beta S\mu\rho.$$

Or, il est clair que l'équation (3) est alors satisfaite par d'autres valeurs de ρ que $\rho = 0$. On a, en effet,

$$\varphi\rho = 0 \qquad \text{si} \qquad \rho \parallel V\lambda\mu.$$

Par suite, z étant un scalar quelconque, on a

$$\varphi(zV\lambda\mu) = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \varphi^{-1}(0) = zV\lambda\mu.$$

L'équation (2) devient donc

$$zV\lambda\mu = m_1 - m_2\varphi + \varphi^2.$$

c'est-à-dire que l'on a, *quel que soit* ρ,

$$z V \lambda \rho = m_1 \rho + m_2 \varphi\rho + \varphi^2 \rho.$$

Posons

$$\varphi\rho = \delta.$$

Il en résulte

$$(\mathrm{I}) \qquad z V \lambda \rho = m_1 \varphi^{-1} \delta + m_2 \delta + \varphi\delta.$$

et comme δ est un vecteur quelconque,

$$m_1 \varphi^{-1} = z V \lambda \rho + m_2 + \varphi.$$

On remarquera que le résultat ainsi obtenu est précisément celui que l'on obtiendrait en opérant par φ^{-1} sur l'équation (H) où l'on fait $m = 0$ en tenant compte de la valeur $\varphi^{-1}(0) = z V \lambda \rho$. L'équation (H) s'applique donc encore dans le cas où m est nul.

En réalité, dans l'équation (I), δ n'est pas absolument quelconque, car la forme de $\varphi\rho$ exige que δ soit un vecteur du plan (α, β), ce vecteur étant d'ailleurs quelconque dans ce plan. Si δ n'est pas coplanaire avec α et β, l'équation $\varphi\rho = \delta$ est *impossible* dans le cas où l'on a $m = 0$.

CHAPITRE X.

L'OPÉRATEUR D'HAMILTON. LE GRADIENT. DÉRIVÉE D'UN SCALAR.

119. Fonctions d'espace. — Nous appellerons en général *fonction d'espace*, une fonction, scalar ou vectorielle, prenant en chaque point de l'espace, c'est-à-dire pour chacune des valeurs du vecteur ρ qui détermine ce point, une valeur *unique et déterminée*. Nous écartons, par cette définition, les fonctions multiformes (au moins dans ces premières considérations). Par exemple un vecteur fonction d'espace pourra être mis sous la forme

$$\sigma = f(\rho) = iX + jY + kZ,$$

X, Y, Z étant trois fonctions scalaires de x, y, z que nous supposons *uniformes*. Hamilton dans ses *Lectures* (art. 620) introduit une nouvelle caractéristique d'opération, désignée à cet endroit par le symbole $\neg$ remplacé depuis par le symbole ∇ et dénommé *Nabla* [1] et qu'il définit par la formule

$$(1) \qquad \nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z},$$

« qui doit être conçu comme opérant sur un scalar, un vecteur ou un quaternion quelconques, regardés comme fonctions des trois variables indépendantes x, y, z ». Plus loin il ajoute : « La simple inspection de ces formules peut suffire à convaincre toute personne au courant, même superficiellement (et je ne prétends pas l'être moi-même très bien) des recherches modernes en physique analytique concernant l'attraction, la chaleur, l'électricité, le magnétisme, etc., que les équations du présent article deviendront certainement d'un usage étendu dans l'étude mathématique des lois naturelles, lorsque le calcul des

[1] L'expression *Nabla* vient de l'analogie de forme existant entre ce signe d'opération et un instrument de musique hébreu de la famille des harpes.

quaternions aura attiré une attention plus générale que celle qui lui a été accordée précédemment, et sera employé comme instrument de recherche par des mains plus habiles que les miennes » (¹).

Les faits ont justifié ces prévisions et le Nabla est en effet devenu l'instrument indispensable du calcul appliqué à la Mécanique ou à la Physique mathématique. Nous nous proposons dans ce Chapitre et dans le Chapitre suivant de donner les notations qui paraissent à peu près universellement admises à ce sujet, dont l'intérêt est capital.

Nous ferons d'abord une remarque. L'opérateur ∇ est défini, comme on vient de le voir, au moyen d'un système de coordonnées rapportées aux axes i, j, k; mais cet opérateur étant un opérateur différentiel, il est clair que l'opération aura un résultat *indépendant de l'origine* des axes et que ceux-ci pourront être transportés parallèlement à eux-mêmes d'une manière quelconque. Mais il y a plus. Ce résultat est *indépendant* également *de leur direction*. En d'autres termes, l'opération ∇, bien que définie au moyen d'un système d'axes (et qui donne d'ailleurs lieu à de grandes facilités dans certains calculs), en est complètement indépendante. Il doit être possible par conséquent de la définir indépendamment de tout système de référence.

Il existe, en effet, plusieurs définitions absolues de ∇ ou des opérateurs qui en dérivent. Nous en donnerons une séparément pour chacun de ces opérateurs et nous nous contenterons ici de montrer que le résultat de l'opération ∇ ne change pas quand on transforme les axes i, j, k en un autre triplet orthogonal quelconque que nous pouvons supposer avoir la même origine.

Soient i', j', k' les nouveaux axes. Nous aurons des relations de la forme

$$\begin{aligned} i &= a'i' + b'j' + c'k', \\ j &= a'i' + b'j' + c'k', \\ k &= a''i' + b''j' + c''k', \end{aligned}$$

et puisque les deux systèmes sont rectangulaires, nous aurons inversement (*cf.* 96)

$$\begin{aligned} i' &= ai + a'j + a''k, \\ j' &= bi + b'j + b''k, \\ k' &= ci + c'j + c''k. \end{aligned}$$

Nous avons alors en désignant par q un quaternion quelconque, par ∇

(¹) *Lectures on quaternions*, Art. 620, p. 610-611.

le symbole

$$i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}$$

et par ∇' le symbole

$$\nabla' = i'\frac{\partial}{\partial x'} + j'\frac{\partial}{\partial y'} + k'\frac{\partial}{\partial z'},$$

l'équation suivante :

$$\nabla' q = i'\frac{\partial q}{\partial x'} + j'\frac{\partial q}{\partial y'} + k'\frac{\partial q}{\partial z'} = i'\left(\frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial q}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x'} + \frac{\partial q}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x'}\right) + \ldots$$

On en déduit, en ayant soin de ne pas inverser les facteurs,

$$\nabla' q = (ai' + bj' + ck')\frac{\partial q}{\partial x} + \ldots = i\frac{\partial q}{\partial x} + \ldots = \nabla q.$$

120. Premiers exemples. — Donnons d'abord quelques exemples simples du résultat de l'application de ∇ à certains cas très fréquents en pratique.

Nous posons généralement

$$(a) \qquad \rho = ix + jy + kz.$$

On a d'abord

$$(1) \qquad \nabla\rho = -3,$$

ρ étant un vecteur *radial* et non un vecteur d'espace. On aurait, en posant $\rho = r\rho_0$,

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}},$$

d'où

$$(2) \qquad \nabla r = \left(i\frac{\partial}{\partial x} + \ldots\right)(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{ix + jy + kz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\rho}{r} = \rho_0.$$

Si α est un vecteur *constant*

$$\alpha = ai + bj + ck,$$

on aura

$$(3) \qquad \nabla S\alpha\rho = -\nabla(ax + by + cz) = -ai - bj - ck = -\alpha.$$

$$(4) \qquad \nabla V\alpha\rho = -\nabla V\rho\alpha = -\nabla(\rho\alpha - S\alpha\rho) = 3\alpha - \alpha = 2\alpha \ldots$$

On voit qu'on pourrait, en partant de sa définition, calculer ∇ dans tous les cas. Mais, dans la pratique, on n'a affaire qu'à deux cas particuliers :

1° La fonction soumise à l'opération ∇ est une *fonction scalaire;*

2° Cette fonction est un *vecteur*.

On peut aussi avoir à opérer par ∇ sur une *fonction vectorielle linéaire*.

Nous étudierons d'abord les deux premiers cas qui sont de beaucoup les plus importants.

121. Le gradient. — Soit u une fonction *scalaire*. Nous désignons par ∇u et nous appellerons *gradient* de u ou simplement *Nabla* de u le résultat de l'opération

$$\nabla u = i\frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial u}{\partial y} + k\frac{\partial u}{\partial z}. \tag{1}$$

Puisque u est un scalar, il en est de même des dérivées partielles de u par rapport à x, y, z et, par conséquent, ∇u est un *vecteur*.

La propriété fondamentale du gradient, qui pourrait lui servir de définition (Gibbs), est donnée par l'équation

$$du = -\mathrm{S}\, d\rho\, \nabla u = -d\rho\, \nabla u. \tag{2}$$

Cette égalité se démontre immédiatement en remarquant que

$$\left\{\begin{aligned} d\rho &= \quad i\,dx + \quad j\,dy + k\,dz, \\ du &= \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy + \frac{\partial u}{\partial z}\,dz. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

On obtient alors du par multiplication scalaire de $d\rho$ et de ∇u.

L'égalité (2) étant une *identité*, il en résulte que, si par un procédé quelconque on a obtenu du sous la forme d'un produit scalaire

$$du = \mathrm{A}\, d\rho,$$

où A est un vecteur, on aura

$$\nabla u = -\mathrm{A}.$$

Cette remarque permet de calculer ∇u dans certains cas. Ainsi, r étant le module du vecteur ρ, on a trouvé

$$dr^2 = 2r\,dr = -2\rho\,d\rho, \qquad \text{d'où} \qquad \nabla r^2 = 2\rho,$$
$$dr = -\rho_0\,d\rho, \qquad \text{d'où} \qquad \nabla r = \rho_0.$$

On peut aussi obtenir souvent le gradient d'une fonction scalar au moyen de la remarque suivante : Si $f(u)$ est une fonction *scalar* de la variable d'espace scalaire u, on a

$$\nabla f(u) = f'(u)\,\nabla u.$$

On a en effet, par (2),

$$df(u) = -S\, d\rho\, \nabla f(u),$$

et, d'autre part, puisque $f(u)$ est une fonction scalaire,

$$df(u) = f'(u)\, du = -f'(u) S\, d\rho\, \nabla u = -S\, d\rho\, f'(u) \nabla u,$$

d'où

$$\nabla f(u) = f'(u) \nabla u. \tag{4}$$

Par exemple, on a

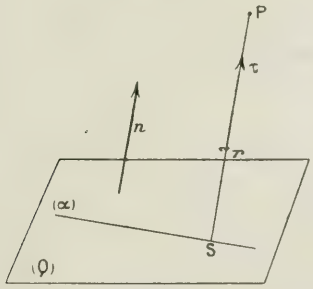
$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}, \qquad \text{d'où} \qquad \nabla \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2}\rho_0 = -\frac{\rho}{r^3},$$

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^2}\right) = -\frac{2}{r^3}, \qquad \text{d'où} \qquad \nabla \frac{1}{r^2} = -\frac{2}{r^3}\rho_0 = -\frac{2\rho}{r^4}.$$

La formule importante $\nabla\rho = \rho_0$ s'applique non seulement lorsque ρ est un vecteur radial, mais encore dans le cas beaucoup plus général où r est la distance d'un point variable à une droite ou à un plan fixes (*fig.* 42).

Soient $P(\rho)$ un point variable et (Q) ou (α) le plan ou la droite

Fig. 42.



fixes auxquels SP est perpendiculaire. Si nous désignons par τ le vecteur SP nous avons

$$r^2 = -\tau^2, \qquad \text{d'où} \qquad r\, dr = -\tau\, d\tau$$

ou

$$r\, dr = \tau(d\rho - d\sigma) = -\tau\, d\rho,$$

car $\tau\, d\sigma = 0$. D'où

$$\nabla r = \frac{\tau}{r} = \rho_0.$$

On écrit souvent cette formule sous la forme

$$\nabla r = n,$$

n étant la normale unité au plan dirigée *du côté où se trouve le point* P.

122. Propriétés du gradient. — L'expression

$$du = -d\rho\,\nabla u$$

montre que la variation de la fonction est nulle lorsque le point $P(\rho)$ se déplace perpendiculairement à ∇u. Il suit de là que si l'on a

$$(1) \qquad u = \text{const.}$$

et par conséquent $du = 0$, c'est-à-dire si le point P se déplace sur une surface telle que (1), ∇u sera constamment *normal* à la surface. Les surfaces $u = \text{const.}$ s'appellent *surfaces de niveau*. Leur construction donne une idée nette de la constitution du champ scalaire u. On voit d'ailleurs que ∇u est dirigé *dans le sens où du augmente* en passant d'une surface du niveau à la surface voisine, car si du est > 0, on doit avoir $d\rho\,\nabla u < 0$ et par suite ∇u a le sens de $d\rho$.

D'après nos conventions (n° 119), les surfaces de niveau ne peuvent pas se couper, car u n'a qu'une seule valeur définie et déterminée en chaque point du champ.

D'après la définition de ∇, on a évidemment

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} &\nabla(u - v) = \nabla u + \nabla v, \\ &\nabla uv = u\,\nabla v - v\,\nabla u, \\ &\nabla au = a\,\nabla u, \qquad a \text{ étant un scalar}, \\ &\nabla du = d\,\nabla u, \qquad d \text{ étant le symbole de la différentiation}. \end{aligned} \right.$$

D'autre part, soit

$$u = f(v, w, \ldots)$$

une fonction scalaire de v, w, ... On a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} + \ldots$$

d'où

$$(3) \qquad \nabla u = \frac{\partial f}{\partial v}\nabla v + \frac{\partial f}{\partial w}\nabla w + \ldots,$$

formule analogue à celle de la différentiation des fonctions impli-

cites. On voit que ∇ se comporte *d'une manière analogue au signe de la différentiation.*

Supposons, par exemple, que r_1, r_2 soient les distances d'un point variable M à deux points fixes. Une équation de la forme

$$u = f(r_1, r_2) = \text{const.}$$

représente une courbe dans le plan ou une surface de révolution dans l'espace. La normale à la courbe ou au plan aura la direction de

$$\nabla u = \frac{\partial f}{\partial r_1} \nabla r_1 + \frac{\partial f}{\partial r_2} \nabla r_2 = \frac{\partial f}{\partial r_1} \rho_1^0 - \frac{\partial f}{\partial r_2} \rho_2^0,$$

où ρ_1^0 et ρ_2^0 sont des vecteurs unitaires dirigés des points fixes vers M.

Par exemple, pour une ellipse ou une hyperbole, on a l'équation

$$r_1 \pm r_2 = \text{const.},$$

et l'on en déduit la construction connue de la normale à ces courbes.

L'expression

$$du = -\nabla u \, d\rho$$

montre que la variation de u pour un déplacement $d\rho$ du point P est égale à la projection du déplacement sur la direction de ∇u. Il en résulte que cette variation sera *maximum* en valeur absolue lorsque le déplacement a lieu dans la direction de ∇u. D'où ce théorème :

∇u donne en chaque point du champ la direction suivant laquelle u varie le plus rapidement.

On remarquera ainsi les formules

$$(4) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = -i \nabla u, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -j \nabla u, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = -k \nabla u.$$

123. Dérivée de u dans une direction. — Nous avons vu que l'expression $\frac{du}{d\rho}$ n'a pas de sens déterminé, car elle dépend de la manière dont $d\rho$ tend vers zéro. Mais on peut supposer que $d\rho$ tend vers zéro en conservant une direction fixe donnée, σ_0. Dans ce cas, $\frac{du}{d\rho}$, qui est égal à

$$\frac{du}{d\rho} = \frac{du}{\sigma_0 \, dr} = -\sigma_0 \frac{du}{dr},$$

est un vecteur qui a une direction déterminée σ_0 et un module égale-

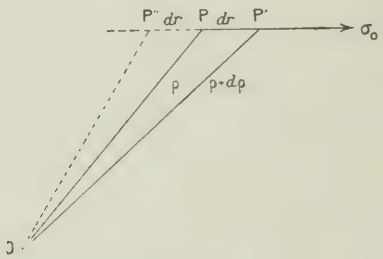
ment déterminé $\pm \frac{du}{dr}$, valeur parfaitement déterminée puisqu'elle est égale à

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos a + \frac{\partial u}{\partial y}\cos b + \frac{\partial u}{\partial z}\cos c,$$

où a, b, c sont les angles de la direction σ_0 avec les axes x, y, z.

Mais il faut noter que *ce n'est pas le vecteur* $\frac{du}{dz}$ qu'on a l'habitude de considérer, *mais bien la dérivée scalar* $\frac{du}{dr}$ et c'est la limite de ce dernier rapport quand dr tend vers zéro qu'on appelle improprement

Fig. 43.



la dérivée de u dans la direction σ_0, de sorte que, par définition, cette dérivée est la limite de (*fig.* 43)

$$\lim \frac{du}{PP'}$$

quand $PP' = dr$ tend vers zéro.

Or, on a

$$du = -\nabla u\, dz = -dr\, \nabla u\, \sigma_0,$$

dr étant toujours ***pris positivement*** comme un module. D'où

$$(1) \qquad \frac{du}{dr} = -\sigma_0 \nabla u.$$

Telle est la valeur de la dérivée $\frac{du}{dr}$.

On peut lui donner une autre forme. Soient s_1, s_2, s_3 les composantes scalaires de σ_0 suivant les axes i, j, k, de sorte que

$$\sigma_0 = is_1 + js_2 + ks_3,$$

on peut écrire par **122**, (4)

$$(2) \qquad \frac{du}{dr} = s_1 \frac{\partial u}{\partial x} + s_2 \frac{\partial u}{\partial y} + s_3 \frac{\partial u}{\partial z}$$

ou encore en désignant par $\sigma_0 \nabla$ le symbole

$$(3) \qquad \sigma_0 \nabla = -\left(s_1 \frac{\partial}{\partial x} + s_2 \frac{\partial}{\partial y} + s_3 \frac{\partial}{\partial z}\right),$$

on peut écrire

$$(4) \qquad \frac{du}{dr} = -(\sigma_0 \nabla) u.$$

Cette manière d'écrire est une *abréviation* souvent commode. Elle se justifie en remarquant que *si l'on considère* ∇ *comme un vecteur* dont les composantes *scalaires symboliques* seraient $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$, on a bien

$$(5) \qquad (\sigma_0 \nabla) = S \sigma_0 \nabla = -\left(s_1 \frac{\partial}{\partial x} + s_2 \frac{\partial}{\partial y} + s_3 \frac{\partial}{\partial z}\right).$$

Mais l'assimilation n'est cependant pas complète, car *on ne peut renverser l'ordre des facteurs* et l'on a ici entre σ_0 et le vecteur symbolique ∇ une barrière analogue à celle que nous avons établie dans le produit dyadique. La notation complète serait

$$S \sigma_0 \nabla u \qquad \text{ou} \qquad \sigma_0 \nabla u.$$

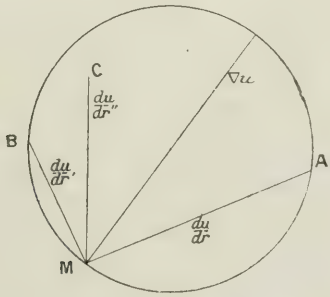
Nous reviendrons plus loin sur cette question.

Remarque. — L'expression (1)

$$\frac{du}{dr} = -\sigma_0 \nabla u$$

exprime que $\frac{du}{dr}$ est la projection du gradient ∇u sur la direction σ_0.

Fig. 44.



On voit que si l'on construit au point M une sphère ayant pour diamètre ∇u (*fig.* 44) pris en grandeur, direction et sens, les différentes

(1) Il est important de remarquer que si u est un scalar, on a $(\sigma_0 \nabla) u = S \sigma_0 \nabla u$.

valeurs de $\frac{du}{dr}$ qui correspondront aux directions issues de M seront les cordes interceptées par la sphère dans ces directions, étant entendu que τ_0 a la direction de la corde considérée MA, par exemple. Il résulte immédiatement de la figure que si l'on considère les dérivées suivant trois directions orthogonales

$$\frac{du}{dr}, \quad \frac{du}{dr'}, \quad \frac{du}{dr''},$$

on a

$$(5) \qquad \left(\frac{du}{dr}\right)^2 + \left(\frac{du}{dr'}\right)^2 + \left(\frac{du}{dr''}\right)^2 = (\nabla u)^2.$$

124. Intégration. — Soit τ un vecteur fonction d'espace. Supposons que le point d'application de ce vecteur décrive une courbe quelconque L, le vecteur τ variera et nous supposons que sa variation reste continue. On appelle *intégrale courbe* du vecteur τ, le long de la ligne L, la somme des résultats obtenus en additionnant les éléments scalars $-\tau\, d\rho$ pris le long de la courbe, celle-ci étant supposée décrite dans un sens déterminé.

On désigne cette intégrale sous la notation $-\int_L \tau\, d\rho$. Supposons que τ soit le gradient d'une fonction scalar u, de sorte qu'on ait

$$\tau = \nabla u.$$

On aura alors

$$-\int_L \tau\, d\rho = \int_L du = u_1 - u_0,$$

u_1 et u_0 indiquant les valeurs de u aux extrémités de la ligne L. On voit que dans ce cas la valeur de l'intégrale *ne dépend pas du chemin parcouru*, mais seulement des valeurs de u aux deux extrémités de la ligne L. Elle sera donc la même quand on partira d'une surface de niveau en un point quelconque pour aboutir en un point quelconque d'une autre surface de niveau et ne dépendra que des valeurs de u sur ces deux surfaces.

En particulier, si nous partons d'une surface de niveau pour y revenir, soit au même point, soit à un autre point de la même surface, l'intégrale aura une valeur nulle.

Cette notion correspond, comme nous le verrons, à celle du potentiel scalar, et l'on dit que le vecteur τ *dérive d'un potentiel* lorsque la condition $\tau = \nabla u$ est satisfaite dans tout le champ. Il sera montré que la réciproque de la proposition précédente est vraie, c'est-à-dire

que quand l'intégrale courbe entre deux points quelconques du champ est indépendante du chemin parcouru, le vecteur de champ dérive d'un potentiel scalar, c'est-à-dire qu'il existe une fonction scalar u telle qu'on ait

$$\tau = \nabla u$$

en tous les points du champ.

125. Exercices. — I. Soient O un point fixe, i un vecteur unitaire fixe, r le module de la distance non nulle de O à P, φ l'angle de OP avec i. On a

$$\nabla\varphi = \frac{1}{r\sin\varphi} \wedge \nabla r \wedge i \nabla r \qquad \text{(Burali-Forti)}.$$

On a, en effet,

$$r\cos\varphi = -i\rho;$$

d'où [n° 120 (3)]

$$\nabla(r\cos\varphi) = i.$$

Or, on a [n° 122 (2)]

$$\nabla r\cos\varphi = \cos\varphi\,\nabla r - r\sin\varphi\,\nabla\varphi;$$

d'où

$$-r\sin\varphi\,\nabla\varphi = i - \cos\varphi\,\nabla r$$

Mais

$$\nabla r = \rho_0.$$

On peut donc écrire

$$-r\sin\varphi\,\nabla\varphi = -i(\nabla r)^2 + \nabla r(i\nabla r) = \nabla r \wedge i\nabla r,$$

puisque

$$(\nabla r)^2 = \rho_0^2 = -1 \qquad \text{et} \qquad \cos\varphi = -i\nabla r,$$

c'est-à-dire la formule proposée.

II. La normale à la sphère en un point est le rayon qui passe par le point de contact.

L'équation scalaire de la sphère est

$$u = \rho^2 = R^2,$$

quand on met l'origine au centre. On en déduit

$$\nabla u = \nabla\rho^2 = -2\rho.$$

La normale est donc le rayon ρ.

III. Établir la formule qui donne ∇r^n, r étant le module de ρ

On a

$$\nabla r^n = nr^{n-1}\nabla r = nr^{n-1}\rho_0 = nr^{n-2}\rho.$$

On aurait de même

$$\nabla\frac{1}{r^n} = -\frac{n\rho}{r^{n+2}}.$$

IV. Si l'on désigne par ∇^2 le résultat de l'opération ∇ appliquée une deuxième fois à q de sorte que

$$\nabla \nabla q = \nabla^2 q,$$

exprimer généralement la forme de $\nabla^2 q$.

On a

$$\nabla^2 q = i \frac{\partial}{\partial x}\left(i \frac{\partial q}{\partial x} + j \frac{\partial q}{\partial y} + k \frac{\partial q}{\partial z}\right) + \ldots$$

et par suite

$$\nabla^2 q = -\left(\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial z^2}\right),$$

en tenant compte de $ij + ji = 0$, ou symboliquement

$$\nabla^2 = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right),$$

quel que soit le sujet de l'opération.

En particulier,

$$\nabla^2 u = -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right),$$

u étant un scalar.

CHAPITRE XI.

APPLICATION DE ∇ A UN VECTEUR. DIVERGENCE ET CURL.

126. Soit σ un vecteur d'espace, c'est-à-dire un vecteur

$$\sigma = iX + jY + kZ, \tag{1}$$

dont les composantes X, Y, Z sont des fonctions que nous supposons continues et déterminées des coordonnées x, y, z. Nous avons par la définition de ∇

$$\nabla\sigma = \left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}\right)(iX + jY + kZ),$$

et un calcul très simple donne le résultat

$$\begin{aligned}\nabla\sigma = &-\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right)\\ &+ i\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) + j\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) + k\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right).\end{aligned} \tag{2}$$

On voit que $\nabla\sigma$ est *un quaternion* dont le scalar est

$$S\nabla\sigma = -\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right), \tag{3}$$

et dont le vecteur peut s'écrire *symboliquement*

$$V\nabla\sigma = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix}. \tag{4}$$

On voit que les formules (3) et (4) sont parfaitement d'accord avec les formules qui donnent $S\nabla\sigma$ et $V\nabla\sigma$, où ∇ est regardé comme un *vecteur symbolique* ainsi qu'on l'a vu au Chapitre précédent.

Nous aurons peu occasion d'employer le quaternion $\nabla\sigma$. Mais le scalar et le vecteur ont une très grande importance. On donne au scalar changé de signe la désignation de *divergence* du vecteur σ et

au vecteur celle de *curl*, *rotor* ou *rotationnel*. Nous verrons un peu plus loin les raisons de ces dénominations. Les notations adoptées seront

$$(5) \qquad -S\nabla\sigma = \operatorname{div}\sigma = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$$

et

$$(6) \qquad V\nabla\sigma = \operatorname{rot}\sigma,$$

de sorte qu'on a

$$(7) \qquad \nabla\sigma = -\operatorname{div}\sigma + \operatorname{rot}\sigma.$$

Les définitions de div et de rot permettraient, en revenant aux expressions cartésiennes, de calculer ces fonctions dans tous les cas. Mais les calculs ainsi conduits seraient souvent longs et compliqués, et en tout cas ne constituent pas une méthode spéciale au calcul vectoriel qui doit se servir autant que possible de ses propres moyens. Nous allons voir comment on peut calculer div et rot dans les cas plus ou moins compliqués que présente la pratique, en nous limitant toutefois aux formules d'une utilité réelle et qui servent à obtenir toutes les autres.

127. Calcul de div **et de** rot. — Nous remarquerons d'abord que div et rot étant des opérateurs différentiels, dont l'un est un scalar et l'autre un vecteur, ces opérateurs jouissent des propriétés de la différentielle en tant que ces propriétés s'accordent avec leur caractère scalar ou vectoriel. On a donc, en désignant par σ et τ deux vecteurs quelconques,

$$(1) \qquad \left\{\begin{aligned} &\operatorname{div}(\sigma+\tau) = \operatorname{div}\sigma + \operatorname{div}\tau, \qquad \operatorname{rot}(\sigma+\tau) = \operatorname{rot}\sigma + \operatorname{rot}\tau, \\ &\operatorname{div} V\sigma\tau = \operatorname{div}_\sigma V\sigma\tau + \operatorname{div}_\tau V\sigma\tau, \\ &\operatorname{rot} V\sigma\tau = \operatorname{rot}_\sigma V\sigma\tau + \operatorname{rot}_\tau V\sigma\tau, \end{aligned}\right.$$

l'indice désignant, par une notation analogue à la notation différentielle usuelle, *la variable qu'on fait seule varier*, l'autre restant constante.

Nous sommes ainsi amenés à chercher tout d'abord à obtenir les valeurs de

$$\operatorname{div} V\alpha\tau \quad \text{et} \quad \operatorname{rot} V\alpha\tau,$$

où α est un vecteur *constant*.

Or on a par définition

$$\operatorname{div} V\alpha\tau = -S\nabla V\alpha\tau.$$

Mais si nous regardons ∇ comme un vecteur symbolique, ceci s'écrit

$$\operatorname{div} V\alpha\sigma = -S\nabla\alpha\sigma = S\alpha\nabla\sigma = S\alpha(-\operatorname{div}\sigma + \operatorname{rot}\sigma),$$

ou finalement (puisque $\operatorname{div}\sigma$ est un scalar)

$$(2) \qquad \operatorname{div} V\alpha\sigma = S\alpha\operatorname{rot}\sigma = \alpha\operatorname{rot}\sigma.$$

On a, d'autre part,

$$\operatorname{rot} V\alpha\sigma = V\nabla V\alpha\sigma.$$

Nous pouvons développer le vecteur double en regardant ∇ comme un vecteur ordinaire, mais nous devons nous rappeler (**123**) que nous ne pouvons pas permuter ∇ avec la *variable* σ, qui étant à droite de ∇ doit rester à droite. Nous obtenons alors

$$\operatorname{rot} V\alpha\sigma = S\alpha\nabla.\sigma - S\nabla\sigma.\alpha.$$

Or $S\nabla\sigma = -\operatorname{div}\sigma$, et l'on écrit habituellement $(\alpha\nabla)$ *par abréviation* au lieu de $S\alpha\nabla$. On a donc

$$(3) \qquad \operatorname{rot} V\alpha\sigma = \alpha\operatorname{div}\sigma + (\alpha\nabla)\sigma,$$

expression dans laquelle on a

$$(4) \qquad (\alpha\nabla)\sigma = -\left(a_1\frac{\partial\sigma}{\partial x} + a_2\frac{\partial\sigma}{\partial y} + a_3\frac{\partial\sigma}{\partial z}\right),$$

a_1, a_2, a_3 étant les composantes du vecteur α suivant les axes. Nous en verrons tout à l'heure l'interprétation géométrique.

Les formules (2) et (3) *sont fondamentales* en tenant compte de la valeur (4) de $(\alpha\nabla)\sigma$. On peut poser *symboliquement*

$$(5) \qquad (\alpha\nabla) = -\left(a_1\frac{\partial}{\partial x} + a_2\frac{\partial}{\partial y} + a_3\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

On a en particulier

$$(5_b) \qquad (\alpha\nabla)\rho = -\alpha.$$

On obtiendra de même deux autres formules importantes qui donnent $\operatorname{div} m\sigma$ et $\operatorname{rot} m\sigma$ dans le cas où m est un *scalar variable*.

On a d'abord

$$\operatorname{div} m\sigma = -S\nabla m\sigma = -S(\nabla m.\sigma + m\nabla\sigma),$$

ou bien

$$(6) \qquad \operatorname{div} m\sigma = m\operatorname{div}\sigma - S\sigma\nabla m = m\operatorname{div}\sigma - \sigma\nabla m.$$

On aura de même

$$\operatorname{rot} m\sigma = V\nabla m\sigma = V(\nabla m.\sigma + m\nabla\sigma)$$

ou

$$(7) \qquad \operatorname{rot} m\sigma = m \operatorname{rot}\sigma - V\sigma\nabla m.$$

Ce sera un utile *exercice* de vérifier ces formules par le calcul direct au moyen des coordonnées.

Nous signalerons également la formule suivante qui résulte de l'application de (1) et (3), quand ρ est un *vecteur radial*. On a

$$\operatorname{rot} V\rho\sigma = \operatorname{rot}\rho - \operatorname{rot}\sigma = \rho \operatorname{div}\sigma - (\rho\nabla)\sigma - [\sigma \operatorname{div}\rho - (\sigma\nabla)\rho].$$

Mais on a

$$\operatorname{div}\rho = -S\nabla\rho = 3, \qquad (\sigma\nabla)\rho = -\sigma;$$

d'où

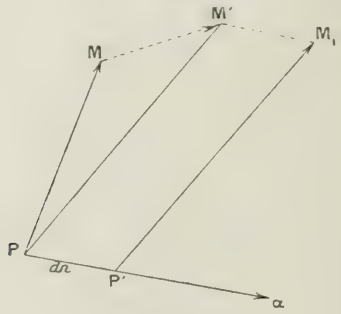
$$(8) \qquad \operatorname{rot} V\rho\sigma = \rho \operatorname{div}\sigma - (\rho\nabla)\sigma - 2\sigma.$$

Ces formules suffisent à calculer div et rot dans tous les autres cas (Cf. *Exercices*, à la fin de ce Chapitre et Note n° 133).

128. **Dérivée d'un vecteur par rapport à un scalar dans une direction donnée.** — Considérons un vecteur fonction d'espace σ appliqué au point P, et supposons que le point d'application P se déplace infiniment peu dans une direction donnée α de la longueur dn (*fig.* 45).

Soit $P'M_1$ ce que devient au point P' le vecteur $PM = \sigma$.

Fig. 45.



Nous aurons

$$d\sigma = MM'$$

en menant par P un vecteur PM' équipollent à $P'M_1$.

Le rapport

$$\frac{d\sigma}{dn} = \frac{MM'}{dn},$$

où dn est un scalar, est alors un vecteur dont la limite s'appelle *la dérivée du vecteur σ dans la direction α.*

On la désigne quelquefois par la notation $D_\alpha \sigma$.

Or on a

$$\frac{d\sigma}{dn} = i\frac{\partial X}{\partial n} + j\frac{\partial Y}{\partial n} + k\frac{\partial Z}{\partial n},$$

et par 123, (4),

$$(1) \qquad \frac{d\sigma}{dn} = -i(\alpha_0\nabla)X - j(\alpha_0\nabla)Y - k(\alpha_0\nabla)Z = D_\alpha\sigma,$$

expression cartésienne de $\frac{d\sigma}{dn}$. On peut écrire

$$(2) \qquad \frac{d\sigma}{dn} = -(\alpha_0\nabla)(iX + jY + kZ) = -(\alpha_0\nabla)\sigma.$$

L'expression (1) peut s'écrire, en appelant a, b, c les cosinus directeurs de α ou les composantes de α_0 suivant les axes,

$$(3) \qquad \frac{d\sigma}{dn} = a\frac{\partial\sigma}{\partial x} + b\frac{\partial\sigma}{\partial y} + c\frac{\partial\sigma}{\partial z}.$$

Nous voyons que l'expression (4) du numéro précédent n'est donc autre chose que

$$(4) \qquad -T\alpha\frac{d\sigma}{dn} = -T\alpha D_\alpha\sigma$$

si le vecteur α n'est *pas unitaire*, et

$$-\frac{d\sigma}{dn} = -D_\alpha\sigma$$

si α est un vecteur *unitaire*. Par suite, *si α est unitaire*, la formule (3) du numéro précédent peut s'écrire

$$(4) \qquad \operatorname{rot} V\alpha\sigma = \alpha\operatorname{div}\sigma - \frac{d\sigma}{dn} = \alpha\operatorname{div}\sigma - D_\alpha\sigma.$$

ce qui lui donne une signification géométrique bien définie.

129. Différentielle totale d'un vecteur. — Supposons qu'un vecteur d'espace σ soit fonction non seulement de son point d'application, mais encore du temps, ou de toute autre variable *scalar*. Nous aurons à distinguer deux sortes de variations de ce vecteur.

1° Une variation que nous pouvons appeler *variation locale*, c'est-à-dire la variation du vecteur σ *appliqué au point* P pendant le temps dt.

Le vecteur appliqué en P étant le vecteur σ à l'instant t, le vecteur qui s'y trouve au moment $t + dt$ est

$$\sigma + \frac{\partial \sigma}{\partial t}\, dt = \sigma_1.$$

2. Une *variation totale*, c'est-à-dire que le vecteur σ devient à l'instant $t + dt$ le vecteur σ' appliqué en un point P′ infiniment voisin de P dans la direction ε de la vitesse du point P et tel que $PP' = \varepsilon\, dt$. La variation totale du vecteur est alors $\frac{d\sigma}{dt}\, dt$.

Or on a, évidemment (*fig.* 46),

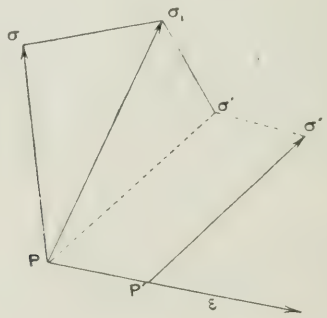
$$\sigma' - \sigma = (\sigma' - \sigma_1) + (\sigma_1 - \sigma)$$

ou

$$(1) \qquad \frac{d\sigma}{dt} = -(\varepsilon \nabla)\sigma - \frac{\partial \sigma}{\partial t}.$$

Ce qui exprime la *variation totale* du vecteur σ (¹).

Fig. 46.



On obtient une formule utile en appliquant ce résultat au vecteur vitesse lui-même. On a alors

$$(2) \qquad \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - (\varepsilon \nabla)\varepsilon.$$

On peut transformer cette expression. On a, en effet, quand α est

---

(¹) On aurait de même

$$(1') \qquad \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial u} - (\varepsilon \nabla) u.$$

u étant un *scalar*.

un vecteur constant (en traitant toujours ∇ comme un vecteur, et appliquant la formule du *double produit vectoriel*),

$$\nabla S\alpha\sigma \quad \text{ou} \quad \nabla(\alpha\sigma) = -V\alpha V\nabla\sigma - (\alpha\nabla)\sigma$$

ou

$$(3) \qquad \nabla(\alpha\sigma) = (\alpha\nabla)\sigma - \alpha \times \operatorname{rot}\sigma.$$

On en déduit, si σ et τ sont deux vecteurs variables,

$$(4) \qquad \nabla(\sigma\tau) = \nabla_\sigma + \nabla_\tau = (\sigma\nabla)\tau - (\tau\nabla)\sigma - \sigma \times \operatorname{rot}\tau - \tau \times \operatorname{rot}\sigma.$$

En appliquant cette formule à ε, nous avons, en posant $\sigma = \tau = \varepsilon$,

$$(5) \qquad \frac{1}{2}\nabla\varepsilon^2 = (\varepsilon\nabla)\varepsilon - \varepsilon \times \operatorname{rot}\varepsilon.$$

On a donc

$$(6) \qquad \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\partial\varepsilon}{\partial t} - \frac{1}{2}\nabla\varepsilon^2 - \varepsilon \times \operatorname{rot}\varepsilon.$$

Remarque. — Les deux remarques suivantes ont une grande importance :

1° *Le curl d'un gradient est identiquement nul;*
2° *La divergence d'un curl est identiquement nulle.*

Ces propriétés résultent de leur définition. On a, en effet,

$$\operatorname{rot}\nabla u = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z} \end{vmatrix} = 0$$

et

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\sigma = -S\nabla V\nabla\sigma = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0.$$

130. L'opérateur ∇^2. — Nous avons vu (n° 125, IV) qu'on a généralement quel que soit le sujet de l'opération

$$(1) \qquad \nabla^2 = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right),$$

en entendant par ∇^2 le résultat de l'opération ∇ sur ∇q, c'est-à-dire

$$(2) \qquad \nabla^2 = \nabla\nabla.$$

Si q est un *scalar*, on a simplement

$$(3) \qquad \nabla^2 u = -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right).$$

Si q est un *vecteur*, ∇^2 peut s'exprimer au moyen de div et rot de la manière suivante. Nous avons

$$\nabla^2 \sigma = \nabla(-\operatorname{div}\sigma - \operatorname{rot}\sigma) = -\nabla \operatorname{div}\sigma - \nabla \operatorname{rot}\sigma.$$

Mais on a par la définition de ∇

$$\begin{aligned}\nabla(\operatorname{rot}\sigma) &= -\operatorname{div}(\operatorname{rot}\sigma) + \operatorname{rot}(\operatorname{rot}\sigma)\\ &= \operatorname{rot}\operatorname{rot}\sigma,\end{aligned}$$

car

$$\operatorname{div}\operatorname{rot} = 0;$$

d'où

$$(4) \qquad \nabla^2 \sigma = -\nabla \operatorname{div}\sigma - \operatorname{rot}^2\sigma,$$

rot^2 ayant ici le sens de rot rot (n° 54). C'est l'expression cherchée.

Dans le cas du scalar, on peut évidemment écrire

$$(5) \qquad \nabla^2 u = \nabla\nabla u = -\operatorname{div}\nabla u + \operatorname{rot}\nabla u = -\operatorname{div}\nabla u.$$

On doit remarquer les formules suivantes (où r est le module du *vecteur radial* ρ) :

$$(6) \qquad \nabla^2 r = -\operatorname{div}\nabla r = -\operatorname{div}\rho_0 = -\frac{2}{r},$$

$$(7) \qquad \nabla^2 \frac{1}{r} = -\operatorname{div}\frac{\rho_0}{r^2} = 0 \quad . \quad [\text{par } 127, (6)].$$

On emploie quelquefois la notation Δ au lieu de ∇^2.

Gibbs donne à l'opérateur $-\nabla^2$ le nom de *laplacien*.

131. **Définition absolue de ∇.** — Nous avons déjà montré (n° 119) que l'opération ∇ est indépendante de l'origine et de la direction des axes. Plusieurs auteurs ont donné de ∇ une définition indépendante de tout système de référence. Nous nous arrêterons à celle qui a été donnée par V. Ygnatowski [1] :

« *On mettra dans le produit, au lieu de* ∇, *l'élément de surface dirigée* df. *On intégrera sur une surface fermée* F, *on divisera par le volume* V *contenu dans* F *et l'on passera à la limite* $V = 0$.

---

[1] W. von Ygnatowski. *Die Vektoranalysis und ihre anwendung in der theoritischen Physik*. Leipzig, 1909, vol. I, p. 15.

Les grandeurs qui, dans le produit, se trouvent devant ∇, doivent être regardées comme constantes dans l'intégration sur F. »

D'après cela, on obtiendrait :

Le gradient, par l'équation

$$\nabla u = \lim_{V=0} \frac{1}{V} \int_F df.u;$$

la divergence, par l'équation

$$\operatorname{div}\sigma = \lim_{V=0} \frac{1}{V} \int_F df.\sigma, \qquad \text{car} \qquad \operatorname{div}\sigma = -S\nabla\sigma;$$

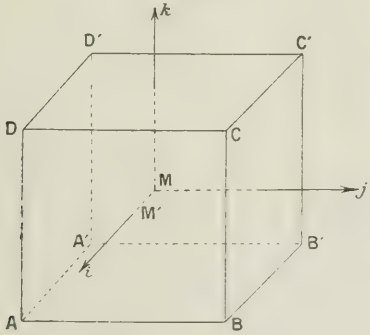
le curl, par l'équation

$$\operatorname{rot}\sigma = \lim_{V=0} \frac{1}{V} \int_F V\, df.\sigma.$$

Nous allons faire voir que ces définitions conduisent à des expressions identiques à celles que nous avons données pour ∇u, $\operatorname{div}\sigma$ et $\operatorname{rot}\sigma$.

Soit M un point de l'espace et soit ABCD, A'B'C'D' un parallélépipède élémentaire dont les arêtes sont parallèles aux axes et ont pour longueurs dx, dy, dz, qui a son centre en ce point (*fig.* 17).

Fig. 17.



Considérons, par exemple, l'expression du gradient, et soit u la valeur du scalar au point M. Soit M' le point où Mi rencontre la face ABCD. En ce point, la valeur principale de u est $u - \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}dx$ et l'on a, pour la face ABCD,

$$u\,df = \left(u - \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}dx\right) i\,dy\,dz$$

comme valeur principale.

Pour la face A'B'CD', on aura de même

$$u\,df = -\left(u - \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}dx\right) i\,dy\,dz.$$

De sorte que la somme résultante sera

$$i\frac{\partial u}{\partial x}dV.$$

On aura alors, pour les six faces,

$$\int_F u\,df = \left(i\frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial u}{\partial y} + k\frac{\partial u}{\partial z}\right)dV$$

et, par suite,

$$\lim_{V=0}\frac{1}{V}\int_F u\,dv = i\frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial u}{\partial y} + k\frac{\partial u}{\partial z} = \nabla u.$$

Une démonstration tout à fait analogue s'obtiendra pour le cas de la divergence et du curl en posant

$$\sigma = iX + jY + kZ.$$

Cette démonstration est d'ailleurs tout à fait indépendante de la direction particulière des axes et de la manière dont le volume dV tend vers zéro. Les définitions ci-dessus sont donc des définitions absolues.

132. Interprétation des opérateurs ∇, div, rot. — Le mot *gradient* n'a pas besoin d'explication : cette dénomination se justifie par la propriété de ∇u, de donner la direction dans laquelle u varie le plus rapidement. La définition d'Ygnatowski permet de justifier la désignation de *divergence*. Considérons un point P et un vecteur d'espace σ attaché à ce point. Supposons que nous entourions le point P d'une surface fermée quelconque contenant un volume V et que nous supposions que ce volume est rempli d'un fluide *dénué de viscosité* et *incompressible*. Les vecteurs d'espace attachés aux différents points du volume pourront être alors assimilés aux vitesses des molécules de fluide qui occupent ces points et il est clair que la quantité de fluide qui sort du volume V ou qui *diverge* de ce volume dans l'unité de temps est la somme des produits de l'aire des éléments de surface par la vitesse normale du fluide, ou

$$-\int S\,df.\sigma,$$

et cette quantité de fluide sortant sera, par unité de volume,

$$-\frac{1}{V}\int_F \sigma\, df,$$

c'est-à-dire à la limite pour $V = 0$, ce sera $\operatorname{div}\sigma$. S'il n'y a au point M *ni production ni disparition* de fluide, on aura évidemment

$$\operatorname{div}\sigma = 0,$$

c'est-à-dire qu'il sort autant de fluide qu'il en entre, car l'intégrale indique l'excès de la quantité de fluide qui sort sur celle qui entre. Dans le cas contraire, on dit que le point M est une *source* (positive ou négative). Son *débit* est la valeur de $\operatorname{div}\sigma$ en ce point.

La désignation *rotor* ou *curl* peut aussi s'interpréter comme il suit. Lorsqu'un corps solide se déplace d'une manière quelconque, la vitesse ε d'un des points est donnée par la formule (80),

$$(1) \qquad \varepsilon = \varepsilon_1 - V\omega\rho,$$

où ε_1 est la vitesse d'un certain point du corps, et ω un vecteur qui est l'axe instantané de rotation et dont la valeur est la même pour tous les points du corps. Opérons par rot sur les deux membres, en remarquant que ε_1 et ω sont des constantes dans l'opération rot qui n'agit que sur les points de l'espace (x, y, z),

$$(2) \qquad \operatorname{rot}\varepsilon = \operatorname{rot} V\omega\rho = 2\omega,$$

c'est-à-dire que le *curl de la vitesse d'un point quelconque est le double de la vitesse angulaire de rotation du solide*. De là le nom de *rotor* ou *rotationnel*.

On peut encore présenter autrement la notion du rotor. Supposons notre fluide hypothétique en mouvement et considérons les molécules de ce fluide. Elles ont un mouvement général qui est celui qu'elles prendraient si le fluide se mouvait comme un solide indéformable, mais elles peuvent avoir en plus un mouvement relatif propre. Supposons, par exemple, que nous considérions une de ces molécules, supposée sphérique pour simplifier, et solidifions brusquement tout le fluide qui cesse ainsi de se mouvoir, à l'exception de la petite sphère que nous considérons. Il pourra se présenter deux cas : ou bien la petite sphère elle-même, arrêtée dans le mouvement de translation qu'elle doit au mouvement général du liquide qui la transporte se mettra au repos, ou bien elle continuera à se mouvoir, ce mouvement

ne pouvant d'ailleurs être maintenant qu'une rotation sur elle-même, ou un *tourbillonnement*.

Quelle est la condition pour qu'il en soit ainsi? Il faut et il suffit pour cela que la somme des quantités de mouvement de la petite sphère par rapport à son centre ne soit pas nulle au moment de la solidification du système. Soit σ le vecteur de champ au centre de la sphère, ce vecteur représentant ici une vitesse. En un point de la sphère, dont le vecteur est ρ_1, par rapport au centre de la sphère, cette vitesse est $\sigma + d\sigma$, et le moment résultant des quantités de mouvement par rapport au centre sera

$$\int V\rho_1 \, d\sigma \, dV,$$

dV étant l'élément de volume de la petite sphère et en supposant la densité du fluide égale à 1. Si nous posons

$$\rho_1 = xi + yj + zk,$$

où x, y, z sont très petits, nous aurons, comme on le voit facilement,

$$V\rho_1 \, d\sigma = -i\left(zx\frac{\partial X}{\partial x} + zy\frac{\partial X}{\partial y} + z^2\frac{\partial X}{\partial z} - yz\frac{\partial Z}{\partial x} - y^2\frac{\partial Z}{\partial y} - yz\frac{\partial Z}{\partial z}\right) - \ldots,$$

où X, Y, Z sont les composantes de σ, et où les dérivées $\frac{\partial X}{\partial x}, \ldots$ doivent être regardées comme des constantes.

Or, il est visible que les portions d'intégrale où entrent les rectangles xy ou autres des coordonnées donnent une somme nulle à cause de la symétrie de la sphère. Le moment sera donc

$$M = -i\int\left(z^2\frac{\partial Y}{\partial z} - y^2\frac{\partial Z}{\partial y}\right) dV - \ldots.$$

Mais on a

$$\int z^2 \, dV = \int y^2 \, dV = \int x^2 \, dV = \frac{1}{3}\int r^2 \, dV = \frac{4\pi}{15} R^5,$$

R étant le rayon de la petite sphère. On a donc

$$M = -\frac{4\pi}{15} R^5 \left[i\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right) - \ldots \right] = \frac{4\pi}{15} R^5 \operatorname{rot}\sigma.$$

Il résulte de là *qu'il y aura ou qu'il n'y aura* pas de *tourbillonnement* suivant que le vecteur rot σ sera *différent de zéro, ou nul*. C'est pourquoi on donne à ce vecteur le nom de *tourbillon*, *rotor*, *rotortionnel* de σ. De même, le mot anglais *curl* signifie boucle.

Remarque. — L'identité (129)

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \sigma = 0$$

peut s'exprimer en disant *qu'il n'y a pas de source de tourbillon.*

133. Note au n° 127 et résumé. — En résumé, l'opérateur ∇ désigne toujours l'opérateur

$$i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z},$$

et peut être traité dans les calculs comme un vecteur symbolique dont les composantes *scalaires* seraient $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ sous la réserve que ces composantes ne peuvent être permutées ni avec les vecteurs i, j, k, ni avec le sujet sur lequel elles opèrent. Mais on peut les permuter avec un vecteur *constant*, c'est-à-dire sur lequel l'opérateur ∇ n'agit pas.

On définit de plus les notations div et rot par les équations

$$\operatorname{div} = -S\nabla, \qquad \operatorname{rot} = V\nabla,$$

où ∇ opère sur un *vecteur* de sorte que l'on a, dans ce cas,

$$\nabla = -\operatorname{div} + \operatorname{rot}.$$

Par convention, nous représentons par la notation $(\alpha\nabla)$ ou $S\alpha\nabla$, où α est un vecteur constant ou variable, dont les composantes scalaires sont a_1, a_2, a_3, et pour abréger l'écriture, le symbole

$$-\left(a_1\frac{\partial}{\partial x} + a_2\frac{\partial}{\partial y} + a_3\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

appliqué à un scalar ou à un vecteur. Il faut bien se garder de confondre $(\alpha\nabla)$ ou $S\alpha\nabla$, avec $S\alpha.\nabla$. Ce dernier est toujours un scalar.

On peut alors en observant ces règles, calculer avec ∇ comme avec un vecteur ordinaire en ayant soin de ne pas le permuter avec son sujet. Nous avons déjà donné au n° 127 des exemples d'application de cette manière de procéder. Nous nous contenterons avant de passer aux exercices suivants de faire une remarque concernant les calculs où entre une expression de la forme $\nabla(\alpha\beta)$ ou $\nabla S\alpha\beta$, c'est-à-dire le gradient d'un scalar. Il faut alors partir de la formule

$$V\alpha V\nabla\beta = S\alpha\nabla.\beta - \nabla S\alpha\beta = (\alpha\nabla)\beta - \nabla S\alpha\beta$$

qui donne

$$\nabla(\alpha\beta) = (\alpha\nabla)\beta - V\alpha \operatorname{rot}\beta,$$

ou bien, ce qui est en général plus simple, de l'une des deux formules [n° 128, (1)] où σ est un vecteur variable $Xi + Yj + Zk$,

$$(a) \qquad (\alpha\nabla)\sigma = iS\alpha\nabla X - jS\alpha\nabla Y + kS\alpha\nabla Z,$$

dans laquelle α est un vecteur *constant ou variable*, et

$$(b) \qquad \nabla(\alpha\sigma) = \nabla S\alpha\sigma = -(a\nabla X + b\nabla Y + c\nabla Z),$$

où α est un vecteur *constant*.

134. Exercices. — I. *Démontrer la formule*

$$S\alpha\nabla(\beta\gamma) = S\gamma(\alpha\nabla)\beta,$$

où γ est un vecteur constant et α et β deux vecteurs variables.

On a, en effet,

$$\nabla(\beta\gamma) = \nabla(\gamma\beta) = -(c\nabla b + c'\nabla b' + c''\nabla b'');$$

d'où

$$S\alpha\nabla(\beta\gamma) = -(cS\alpha\nabla b + c'S\alpha\nabla b' + c''S\alpha\nabla b'') = S\gamma(\alpha\nabla)\beta \qquad [\text{n° } 133, (a)].$$

II. *Démontrer dans la même hypothèse la formule*

$$S\gamma(\alpha\nabla)\beta = S\alpha(\gamma\nabla)\beta + S\gamma\alpha \operatorname{rot}\beta.$$

Appliquer la formule

$$\nabla(\gamma\beta) = (\gamma\nabla)\beta - V\gamma \operatorname{rot}\beta,$$

opérer par $S\alpha$ sur les deux membres et tenir compte de la formule (b).

III. *Démontrer la formule*

$$S\alpha\nabla\beta^2 = 2S\alpha(\beta\nabla)\beta + 2S\beta\alpha \operatorname{rot}\beta.$$

Résulte de 129, (4) qui donne

$$\frac{1}{2}\nabla\beta^2 = (\beta\nabla)\beta - V\beta \operatorname{rot}\beta.$$

Opérer par $S\alpha$.

IV. *Démontrer la formule*

$$S\alpha\nabla\beta^2 = 2S\beta(\alpha\nabla)\beta.$$

Résulte de l'identité (obtenue en faisant $\gamma = \beta$ dans II)

$$S\beta(\alpha\nabla)\beta = S\alpha(\beta\nabla)\beta + S\beta\alpha + \operatorname{rot}\beta$$

et de la formule III.

V. *Montrer que si l'on pose*

$$\sigma = iX + jY + kZ,$$

on a

$$\nabla^2\sigma = i\nabla^2 X + j\nabla^2 Y + k\nabla^2 Z.$$

VI. *α et β étant des vecteurs variables, on a*

$$\operatorname{rot} V\alpha\beta = \alpha \operatorname{div}\beta - \beta \operatorname{div}\alpha + (\alpha\nabla)\beta - (\beta\nabla)\alpha,$$
$$\operatorname{div} V\alpha\beta = S\alpha \operatorname{rot}\beta - S\beta \operatorname{rot}\alpha.$$

VII. *Le curl d'une fonction linéaire autoconjuguée $\varphi\rho$ est nul;* car si $\varphi\rho$ est autoconjuguée, elle peut se mettre sous la forme

$$\varphi\rho = \Sigma V\alpha\rho\beta + h\rho.$$

Opérons par ∇, nous avons

$$\nabla V\alpha\rho\beta = \nabla(\alpha S\beta\rho - \rho S\alpha\beta + \beta S\alpha\rho) = -\alpha\beta + 3S\alpha\beta - \beta\alpha = S\alpha\beta$$

et, par suite,

$$\nabla\varphi\rho = \Sigma S\alpha\beta - 3h = \text{un scalar}.$$

Donc

$$\operatorname{rot}\nabla\varphi\rho = 0.$$

VIII. *Calculer le curl et la divergence d'une fonction linéaire quelconque.* — Une fonction φ quelconque peut se mettre sous la forme

$$\varphi\rho = \psi\rho + V\varepsilon\rho,$$

ψ étant autoconjuguée. On a donc

$$\operatorname{rot}\varphi\rho = \operatorname{rot} V\varepsilon\rho = 2\varepsilon \qquad [\mathbf{132}, (2)]$$

et

$$\operatorname{div}\varphi\rho = \operatorname{div}\psi\rho, \qquad \text{car} \qquad \operatorname{div} V\varepsilon\rho = S\varepsilon \operatorname{rot}\rho = 0.$$

On en déduit (*cf.* **105**)

$$\operatorname{div}\varphi\rho = \operatorname{div}\psi\rho = m_2$$

et, par suite,

$$\nabla\varphi\rho = -m_2 - 2\varepsilon.$$

IX. *α étant un vecteur constant, on a*

$$\nabla\left(S + \frac{1}{2}V\right)\varphi\rho = 0;$$

car

$$\nabla S\alpha\rho = -\alpha, \qquad \nabla V\alpha\rho = 2\alpha;$$

d'où

$$\operatorname{div}\left(S + \frac{1}{2}V\right)\alpha\rho = 0, \qquad \operatorname{rot}\left(S + \frac{1}{2}V\right)\alpha\rho = 0.$$

X. *Étant donné le quaternion*

$$q_1 = \alpha\varphi\alpha + \beta\varphi\beta + \gamma\varphi\gamma,$$

où α, β, γ *représentent un système unité trirectangulaire et* φ *une fonction linéaire, montrer que l'on a*

$$\begin{aligned} S q_1 &= -m_2 = -\operatorname{div}\varphi\rho, \\ V q_1 &= \quad 2\varepsilon \;=\; \operatorname{rot}\varphi\rho. \end{aligned}$$

On a

$$\alpha = \beta\gamma, \quad \ldots, \qquad \text{d'où} \qquad q_1 = \beta\gamma\varphi\alpha + \gamma\alpha\varphi\beta + \alpha\beta\varphi\gamma;$$

d'où (puisque $S\alpha\beta\gamma = -1$) et en supposant que φ est autoconjuguée

$$S q_1 = -(S\beta\gamma\varphi'\alpha + \ldots) = -m_2.$$

Si φ n'est pas autoconjuguée, on a

$$\varphi\rho = \varphi'\rho + 2V\varepsilon\rho$$

et les termes en $V\varepsilon\rho$ donnent dans $S q_1$

$$S(\beta\gamma V\varepsilon\alpha + \gamma\alpha V\varepsilon\beta + \alpha\beta V\varepsilon\gamma = 0.$$

On a donc généralement

$$\operatorname{div}\varphi\rho = m_2 = -S q_1.$$

On a, d'autre part,

$$\begin{aligned} V q_1 &= \beta S\gamma\varphi\alpha - \gamma S\beta\varphi\alpha + \gamma S\alpha\varphi\beta - \alpha S\gamma\varphi\beta + \alpha S\beta\varphi\gamma - \beta S\alpha\varphi\gamma \\ &= \alpha(S\beta\varphi\gamma - S\gamma\varphi\beta) + \ldots = \alpha S\beta(\varphi - \varphi')\gamma + \ldots \\ &= 2\alpha S\beta\varepsilon\gamma \qquad\qquad + \ldots = -2(\alpha S\alpha\varepsilon + \ldots) = 2\varepsilon; \end{aligned}$$

d'où

$$\operatorname{rot}\varphi\rho = V q_1 = 2\varepsilon.$$

XI. u étant un *scalar, on a l'identité*

$$\nabla^2.\nabla u = \nabla.\nabla^2 u.$$

Car si u est un scalar, ∇u est un vecteur et l'on a

$$\nabla^2.\nabla u = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\nabla u - \nabla\operatorname{div}\nabla u = -\nabla\operatorname{div}\nabla u.$$

D'autre part, $\nabla^2 u$ est alors un scalar et l'on a

$$\nabla^2 u = -\operatorname{div}\nabla u.$$

d'où

$$\nabla^2.\nabla u = \nabla.\nabla^2 u.$$

XII. *Démontrer la formule*

$$S.\delta\rho\nabla\frac{V\alpha\rho}{r^3} = -\delta\frac{S\alpha\rho}{r^3} = \delta S\alpha\nabla\frac{1}{r} \qquad \text{ou} \qquad r = T\rho \qquad (\text{Tait}, 450).$$

On a

$$\begin{aligned} S\,\delta\rho\nabla\frac{V\alpha\rho}{r^3} &= S\,\delta\rho\nabla(r^{-3}V\alpha\rho) \qquad = S\,\delta\rho[-3r^{-5}\rho V\alpha\rho + 2\alpha r^{-3}] \\ &= \frac{\rho^2 S\alpha\,\delta\rho - 3S\alpha\rho S\rho\,\delta\rho}{r^5} = -\frac{S\alpha\,\delta\rho}{r^3} - \frac{3S\alpha\rho S\rho\,\delta\rho}{r^5} \\ &= -\delta\frac{S\alpha\rho}{r^3} = \delta S\alpha\nabla\frac{1}{r}. \end{aligned}$$

XIII. *γ étant un vecteur satisfaisant à l'équation $\nabla\operatorname{div}\gamma = 0$, on a l'identité*

$$\nabla^2\operatorname{rot}\gamma = -\operatorname{rot}\nabla^2\gamma.$$

On a, en effet,

$$\begin{aligned} \nabla^2\operatorname{rot}\gamma &= \operatorname{rot}^2\operatorname{rot}\gamma - \nabla\operatorname{div}\operatorname{rot}\gamma = \operatorname{rot}^2\operatorname{rot}\gamma, \\ \operatorname{rot}\nabla^2\gamma &= \operatorname{rot}\operatorname{rot}^2\gamma - \operatorname{rot}\nabla\operatorname{div}\gamma = \operatorname{rot}\operatorname{rot}^2\gamma. \end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer que l'on a dans le cas actuel

$$\operatorname{rot}^2\operatorname{rot}\gamma = -\operatorname{rot}\operatorname{rot}^2\gamma.$$

Or, si nous posons

$$\gamma = iX + jY + kZ,$$

cette identité résulte de

$$\operatorname{rot}^2\operatorname{rot}\gamma = -\left(\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2}\right)\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$$

et

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}^2\gamma = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix}.$$

XIV. *Démontrer la formule*

$$\nabla^2(uv) = v\nabla^2 u + u\nabla^2 v - 2S\nabla u\nabla v.$$

On part de la formule

$$\nabla(uv) = v\nabla u + u\nabla v \qquad [\text{n}^{\text{os}}\ 122,\ (2)],$$

d'où

$$\nabla^2(uv) = \nabla(v\nabla u + u\nabla v) = (-\operatorname{div} + \operatorname{rot})(u\nabla u - u\nabla v)$$

qu'il suffit de développer.

XV. σ étant une fonction d'espace du vecteur ρ, désignons par $d\rho$ et $\delta\rho$ deux variations *arbitraires* de ρ et soient $d\sigma$ et $\delta\sigma$ les variations correspondantes de σ. *On a la formule*

$$S \operatorname{rot}\sigma\, d\rho\, \delta\rho = S\, d\sigma\, \delta\rho - S\, d\rho\, \delta\sigma$$

[c'est cette propriété du curl que Burali-Forti (*Calcul vectoriel*, p. 71) prend comme définition de $\operatorname{rot}\sigma$].

On peut démontrer facilement directement cette proposition en posant

$$\rho = ix + jp - kz;$$

d'où

$$d\rho = i\,dx + \ldots \qquad \delta\rho = i\,\delta x + \ldots$$

formant $\operatorname{rot}\sigma$ et effectuant le calcul.

On peut aussi employer le calcul symbolique (n° 133). On a

$$S \operatorname{rot}\sigma\, d\rho\, \delta\rho = SV\nabla\sigma V\, d\rho\, \delta\rho = S\,\delta\rho\nabla S\sigma\, d\rho - S\, d\rho\nabla S\sigma\,\delta\rho.$$

Mais

$$S\, d\rho.\nabla = (d\rho.\nabla) = -d \qquad \text{et} \qquad S\,\delta\rho\,\nabla = (\delta\rho.\nabla) = -\delta;$$

d'où

$$S \operatorname{rot}\sigma\, d\rho\, \delta\rho = S\, d\sigma\, \delta\rho - S\, \delta\sigma\, d\rho.$$

XVI. *σ étant un vecteur d'espace fonction de ρ, et α un vecteur unitaire quelconque, démontrer la formule*

$$\operatorname{div}\sigma = S\alpha[\nabla(\alpha\sigma) + \operatorname{rot} V\sigma\alpha].$$

(c'est cette propriété que Burali-Forti prend comme définition de la divergence du vecteur σ).

Le résultat s'obtient immédiatement au moyen des formules

$$\nabla(\alpha\sigma) = (\alpha\nabla)\sigma - V\alpha \operatorname{rot}\sigma \qquad [\text{n° } 129, (3)]$$

et

$$\operatorname{rot} V\sigma\alpha = -\alpha \operatorname{div}\sigma - (\alpha\nabla)\sigma \qquad [\text{n° } 127, (3)].$$

CHAPITRE XII.

INTÉGRALES MULTIPLES.

135. Remarques préliminaires. La définition des intégrales multiples en analyse suppose que la fonction qui se trouve sous le signe d'intégration est continue ou bien discontinue, mais sans passage par l'infini et l'on suppose, de plus, que le champ d'intégration est fini. Par exemple, si l'on considère pour fixer les idées, une intégrale double

$$(1) \qquad I = \int\int_C f(x, y)\, dx\, dy,$$

en admettant que la fonction $f(x, y)$ est uniformément continue dans l'aire C et sur son contour, et que cette aire soit limitée, on démontre que si l'on décompose l'aire C d'une manière quelconque en éléments de surface $d\sigma$ et que l'on prenne dans l'intérieur de l'élément $d\sigma$ ou sur son contour un point quelconque x, y, la somme

$$(2) \qquad \sum f(x, y)\, d\sigma$$

tend vers une limite finie, indépendante du mode de décomposition de C en éléments et du choix du point xy dans chaque élément. C'est cette limite que l'on appelle *intégrale double* prise dans le champ C et que l'on représente par la notation (1).

La définition de l'intégrale triple est tout à fait analogue.

Ces définitions cessent d'avoir un sens si la fonction à intégrer devient infinie dans le champ d'intégration ou si celui-ci devient infini. Le premier cas peut se présenter, soit en des points isolés (par exemple, à l'origine pour la fonction $\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$), soit le long d'une ligne, soit le long d'une surface (par exemple sur la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ pour la fonction $\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2 - a^2}$).

On étendra les définitions à ces cas nouveaux, au moyen d'un principe dont l'application constitue la *méthode* dite des *discontinuités* et qui consiste en ceci :

1° Dans le cas où la fonction à intégrer devient infinie, on isole le point, la ligne ou la surface de discontinuité du reste du champ, en entourant le point d'une petite surface, la ligne d'un petit tube, et la surface de discontinuité de deux autres surfaces qui la séparent du reste du champ. On peut très bien supposer d'ailleurs que, dans le cas du tube ou des surfaces limites, la dimension transversale du tube ou la distance normale des deux surfaces limites est infiniment petite par rapport à l'arc de courbe pris le long de la ligne de discontinuité ou sur la surface de discontinuité et regardé comme infiniment petit principal. Le champ d'intégration est ainsi divisé en deux régions : l'une R dans laquelle la fonction est continue ou discontinue sans passage par l'infini, l'autre r où la fonction est discontinue, et l'on aura

$$\int_C = \int_R + \int_r.$$

L'intégrale $\int_C$ aura un sens si $\int_r$ tend vers zéro quand le champ r tend vers zéro *d'une manière quelconque*, et la limite de $\int_R$ ainsi obtenue s'appellera l'*intégrale prise dans le champ* C.

2° Dans le cas où le champ C est infini, on le divisera de même en deux parties au moyen d'une surface quelconque Γ et l'on aura ainsi deux champs, l'un R fini à l'intérieur de la surface Γ, l'autre r extérieur à Γ et qui s'étend à l'infini. On posera

$$\int_C = \int_R + \int_r$$

et l'on appellera *intégrale dans le champ* C la limite du deuxième membre, si cette limite existe, c'est-à-dire si $\int_r$ tend vers zéro, *de quelque manière que l'on fasse croître* R aux dépens de r. Il peut arriver que la limite de $\int_R$ ne soit pas la même suivant la façon dont R augmente indéfiniment, ou bien qu'il n'y ait pas de limite du tout. Dans chacun de ces cas, le symbole $\int_C$ cesse d'avoir un sens précis et ne peut plus être employé dans le calcul. Pour que $\int_R$ ait

une limite indépendante de l'ordre des termes de la somme $\sum f\,d\tau$ ou $\sum f\,dV$ qui sert à la définir, il faut et il suffit que la série

$$\sum f(x, y)\,d\tau \qquad \text{ou} \qquad \sum f(x, y, z)\,dV$$

(suivant qu'il s'agit d'une intégrale double ou triple) soit *absolument convergente*, c'est-à-dire que l'intégrale

$$\int_C \operatorname{mod} f(x, y)\,d\tau \qquad \text{ou} \qquad \int_C \operatorname{mod} f(x, y, z)\,dV$$

ait une limite finie.

Il n'y a pas de règles générales permettant de décider si la limite existe, mais on peut souvent, dans la pratique, avoir recours aux théorèmes suivants.

136. A. Cas d'un champ infini. — Théorème. — « Si pour tous les points *extérieurs* à un cercle fixe de rayon r_0, on a

$$\operatorname{mod} f(x, y) \leqq \frac{A}{r^\alpha},$$

r étant la distance du point au centre du cercle, A une constante et α un exposant *supérieur à* 2, l'intégrale

$$\int_\infty |\operatorname{mod} f(x, y)|\,dS$$

est finie dans un champ infini quelconque (en supposant, bien entendu, que la fonction f est continue dans tout le champ. »

En effet, on a dans cette hypothèse

$$\int |\operatorname{mod} f(x, y)\,dS \leqq \int \frac{A}{r^\alpha}\,r\,dr\,d\varphi,$$

en faisant un changement de variables et prenant les coordonnées polaires, c'est-à-dire

$$= A \int_{r_0}^{\infty} \frac{r\,dr}{r^\alpha} \int_0^{2\pi} d\varphi \qquad \text{ou} \qquad = \frac{2\pi A}{\alpha - 2}\left[\frac{1}{r^{\alpha-2}}\right]_{r_0}^{\infty},$$

qui est finie si $\alpha > 2$.

B. **Fonction discontinue en un point.** THÉORÈME. — « Si pour tous les points *intérieurs* à un cercle de rayon r_0, ayant son centre au point de discontinuité, on a

$$\operatorname{mod} f(x, y) < \frac{A}{r^\alpha},$$

r étant la distance du point x, y au centre C_0, A une constante et α un nombre *inférieur à* 2, l'intégrale

$$\int_S |\operatorname{mod} f(x, y)| \, dS$$

est finie dans un champ quelconque entourant le point. »

Même démonstration.

C. On aurait deux théorèmes exactement semblables dans le cas des intégrales triples, mais avec $\alpha >$ *ou* < 3 *au lieu de* $>$ *ou* < 2 [1].

137. **Intégrales vectorielles et scalaires.** — Les intégrales que nous aurons à considérer dans les propositions suivantes seront de trois espèces. Les unes seront de la forme

$$\int F \, dS \quad \text{ou} \quad \int F \, dV,$$

où F est une fonction *scalaire* de ρ, et ne différeront par conséquent aucunement des intégrales que nous venons d'examiner, car, en exprimant ρ au moyen de ses composantes x, y, z, on obtiendrait une intégrale ordinaire de l'une des formes

$$\int\int f(x, y) \, dx \, dy \quad \text{ou} \quad \int\int\int f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz.$$

Nous aurons aussi des intégrales curvilignes (où σ est un vecteur de champ)

$$\int_l \sigma \, d\rho.$$

---

(1) On trouvera des détails complémentaires sur ces questions préliminaires dans les Traités classiques d'Analyse. *Voir* en particulier HUMBERT, *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique* (Paris, Gauthier-Villars), que nous avons suivi dans l'exposé des matières du Chapitre XII, en adoptant toutefois la notation vectorielle.

Ce sont des intégrales *scalaires*, sur lesquelles il n'y a pas à revenir (*cf.* n° **124**).

Enfin, nous aurons des intégrales de la forme

$$\int V\,dS \quad \text{ou} \quad \int V\,dv,$$

où V est une fonction *vectorielle* et, d'une manière générale, un vecteur. Ce cas se ramène immédiatement au cas précédent, car une intégrale telle que

$$\int \sigma\,dS,$$

par exemple, est équivalente à la somme de trois intégrales

$$i\int X\,dS + j\int Y\,dS + k\int Z\,dS,$$

et les conditions de continuité devront avoir lieu séparément pour chacune des trois intégrales scalaires

$$\int X\,dS, \quad \int Y\,dS, \quad \int Z\,dS.$$

138. Définitions. Flux. — Nous savons que l'on appelle *champ vectoriel*, ou champ de vecteurs, un espace à chaque point duquel est supposé attaché un vecteur fonction de la *position* de ce point. Par analogie avec le cas où ces vecteurs sont des forces, on appelle, d'une manière générale, *lignes de forces* les courbes qui, en chacun de leurs points, ont pour tangente le vecteur σ attaché à ce point.

Considérons dans le champ un contour fermé quelconque. En chacun des points de ce contour passe une ligne de forces et une seule, puisque nous supposons que le vecteur de champ est monodrome, c'est-à-dire qu'il a, en chaque point du champ, une valeur déterminée d'une manière univoque. Ces lignes ne se rencontreront donc pas et formeront un tube que l'on appelle *tube de forces*.

Au lieu de considérer le champ comme un champ de forces, nous avons vu qu'on peut aussi le considérer comme un *champ de vitesses*, c'est-à-dire qu'on suppose le champ rempli d'un fluide incompressible et dénué de viscosité, et dans ces conditions la vitesse des molécules peut varier d'une manière quelconque d'un point à l'autre. Nous supposons toujours toutefois que cette variation est *continue*. On attribue alors, comme vitesse à chaque molécule, le vecteur attaché au point qu'elle occupe. Nous supposons également

que le liquide qui occupe le champ est *en régime permanent*, c'est-à-dire que la vitesse et la direction du mouvement en un point sont indépendantes du temps, de manière que la vitesse ne dépend alors que des coordonnées de ce point.

En nous plaçant à ce dernier point de vue, considérons dans le fluide en mouvement un élément plan de surface dS et supposons que nous choisissions (arbitrairement d'ailleurs) une direction positive pour la normale unité n à cet élément. Dans ce qui suit, par exemple, nous choisirons toujours, comme direction positive de la normale à un élément de surface, la normale dirigée vers *l'intérieur* de cette surface, si elle est fermée. Nous appelons *flux élémentaire* du vecteur σ à travers l'élément ds l'expression

$$d\Phi = -S n \sigma dS = -n \sigma dS.$$

L'expression employée ici se justifie en ce que $d\Phi$ représente le *volume* de fluide qui traverse l'élément plan dS *dans la direction de la normale positive* (ou l'excès du volume qui traverse dS dans la direction positive sur celui qui traverse l'élément dans la direction négative) *pendant l'unité de temps*.

Cette notion acquiert en Physique une importance capitale.

L'interprétation de l'expression $-n\sigma dS$ devient évidente si nous remarquons que $-n\sigma$ représente, *en grandeur et en signe*, la projection de la vitesse du fluide (ou de la molécule de fluide) sur la normale à l'élément de surface, c'est-à-dire sa vitesse normale.

Si l'on considère alors une surface fermée S et que l'on désigne par n la normale *intérieure* en chaque point de la surface S, l'intégrale

$$\int_S n \sigma dS$$

représente la quantité totale de fluide qui passe dans la direction de la normale dans l'unité de temps, c'est-à-dire qui entre dans la surface. On l'appelle le *flux total entrant* dans l'unité de temps.

On voit immédiatement que le flux total à travers la nappe d'un tube de forces est nul (car $n\sigma = 0$).

139. Théorème de la divergence [1]. — Si nous nous reportons à l'interprétation de la divergence au n° 132 et au calcul n° 131, nous

[1] On donne aussi à ce théorème le nom de *formule d'Ostrogradsky* ou de *théorème de Gauss*.

voyons que le flux total *sortant* à travers la petite surface qui contient le volume V est égal au produit de ce volume par la divergence au point P. Si nous décomposons alors le volume compris dans une surface S en volumes élémentaires et si nous considérons que, pour deux de ces petits volumes adjacents suivant une face, le flux sortant de l'un devient le flux entrant pour l'autre suivant cette face, nous voyons qu'en étendant l'intégration à tout le volume nous avons l'équation

$$(1) \qquad \int_V \operatorname{div} \sigma \, dV = \int_S n \sigma \, dS.$$

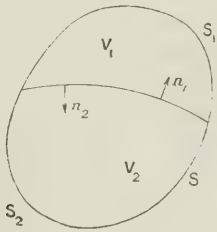
n désignant la normale *intérieure* à la surface S. C'est le *théorème de la divergence*. Il permet de transformer une certaine intégrale de volume en une intégrale de surface. Son expression en coordonnées cartésiennes est

$$(2) \qquad \int_V \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) dV + \int_S (X \cos\alpha + Y \cos\beta + Z \cos\gamma) \, dS = 0,$$

α, β, γ étant les angles de la normale intérieure avec les axes.

Remarques. — I. La formule suppose que σ et ses dérivées sont monodromes et continues dans V et sur S. Mais elle reste vraie si σ

Fig. 48.



reste continu et monodrome à l'intérieur de V, ses dérivées pouvant cesser d'être continues, *sans passer par l'infini*, en des points isolés de V ou sur une surface ou une ligne traversant V. Si, en effet, les dérivées sont discontinues le long d'un diaphragme C, par exemple, σ étant monodrome dans V et sur la surface S, nous aurons

$$\int_{V_1} \operatorname{div} \sigma \, dV = \int_{S_1} n_1 \sigma \, dS + \int_C n_1 \sigma \, dS,$$

$$\int_{V_2} \operatorname{div} \sigma \, dV = \int_{S_1} n_2 \sigma \, dS + \int_C n_2 \sigma \, dS,$$

ou bien, en additionnant,

$$\int_V \operatorname{div} \sigma \, dV = \int_S n \sigma \, dS,$$

car les intégrales de surface sur C se détruisent, puisque σ est monodrome.

II. La formule suppose connues σ et ses dérivées en chaque point du volume V et du contour limite S. Mais elle ne suppose rien sur leurs valeurs en dehors de la surface limite S, de sorte que la fonction σ peut être discontinue ou même cesser d'exister, ainsi que cela arrive, par exemple, pour une fonction analytique en dehors de son cercle de convergence. Il résulte de là que, en particulier, S peut être une surface de discontinuité pour σ, pourvu que, quand le point M tend d'une manière quelconque vers un point de S *en restant dans* V, la fonction σ tende vers une limite finie et déterminée.

C'est pour cette raison que l'on emploie dans ce théorème la normale intérieure à la surface S et non la normale extérieure.

III. Le théorème est encore vrai lorsque l'on remplace σ par $\frac{\sigma}{r}$, r étant la distance d'un point quelconque du volume V à un pôle O, *intérieur à* V, bien qu'en ce point la fonction $\frac{\sigma}{r}$ devienne infinie. Ceci résulte du n° 136 (B), car on voit d'abord que dans l'intérieur d'une petite sphère de centre O on a

$$\operatorname{mod} n \frac{\sigma}{r} = \operatorname{mod} \frac{\sigma}{r} = \frac{A}{r},$$

A étant le maximum du module de σ aux environs du point O. Donc l'intégrale de surface a une limite finie.

De même, on a

$$\operatorname{mod} \operatorname{div} \frac{\sigma}{r} = \operatorname{mod} \left(\frac{1}{r} \operatorname{div} \sigma + \frac{\sigma \rho_0}{r^2} \right),$$

et $\operatorname{div} \sigma$ ainsi que $\sigma \rho_0$ restent finis dans l'intérieur de la sphère. Donc l'exposant 2 étant ici < 3, l'intégrale de volume est finie dans le champ V, y compris le point O.

On a donc l'équation

$$(3) \qquad \int_V \operatorname{div} \frac{\sigma}{r} \, dV = \int_S n \frac{\sigma}{r} \, dS.$$

140. Théorème du gradient. — Soient u une fonction scalar monodrome et finie ainsi que ses dérivées premières, et α un vecteur constant. Remplaçons σ par αu dans (1) du numéro précédent; nous aurons, en développant $\operatorname{div}\alpha u$ [*cf.* n° **127**, (6)],

$$\int_V (u \operatorname{div}\alpha - \alpha \nabla u)\, dV = \int_S u \alpha n\, dS.$$

Mais $\operatorname{div}\alpha = 0$. On a donc

$$-\alpha \int_V \nabla u\, dV = \alpha \int_S u n\, dS$$

ou bien, puisque α est quelconque,

$$(1) \qquad \int_V \nabla u\, dV = -\int u n\, dS;$$

c'est la formule qui exprime le *théorème du gradient*.

Cette formule est encore applicable quand on y remplace u par $\frac{u}{r}$, r ayant la même signification que dans **139** (III). La démonstration est la même. D'où

$$(2) \qquad \int_V \nabla \frac{u}{r}\, dV = -\int_S \frac{u}{r} n\, dS.$$

L'expression cartésienne de la formule (1) est

$$(3) \qquad \int_V \frac{\partial u}{\partial x}\, dV + \int_S u \cos\alpha\, dS = 0$$

et deux analogues.

Celle de (2) serait

$$(4) \qquad \int_V \frac{\partial \frac{u}{r}}{\partial x}\, dV + \int_S \frac{u}{r} \cos\alpha\, dS = 0.$$

141. Théorème du curl. — Remplaçons maintenant dans (1) le vecteur σ par $V\alpha\sigma$, où α est un vecteur constant. On aura

$$\operatorname{div} V\alpha\sigma = \alpha \operatorname{rot}\sigma$$

et, par suite, on a l'équation

$$\int_V \alpha \operatorname{rot}\sigma\, dV = \int_S S n V \alpha\sigma\, dS = \alpha \int_S V \sigma n\, dS;$$

d'où, puisque α est quelconque,

$$(1) \qquad \int_V \operatorname{rot} \sigma \, dV = \int_S V \sigma n \, dS,$$

formule qui exprime le *théorème du curl*.

On l'étendra, comme précédemment, au cas où l'on remplace σ par $\frac{\sigma}{r}$,

$$(2) \qquad \int_V \operatorname{rot} \frac{\sigma}{r} \, dV = \int_S \frac{V \sigma n}{r} \, dS.$$

L'expression cartésienne de cette formule est

$$\int_V \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) dV = \int_S (Y \cos\gamma - Z \cos\beta) \, dS$$

et deux autres analogues.

Remarque. — Il ne faut pas oublier que, dans toutes ces formules, c'est la direction de la *normale intérieure* à la surface S qui est considérée comme positive.

142. Définitions. — Soit σ un vecteur dont le point d'application décrit une courbe L quelconque. On appelle *circulation* de ce vecteur le long de la courbe L, le *travail* qui serait effectué par le vecteur *si on le considérait comme une force* variable dont le point d'application décrit la courbe L. L'expression analytique de la circulation est donc donnée par l'intégrale curviligne

$$C = -\int_L \sigma \, d\rho.$$

Considérons maintenant une surface limitée par le contour L, supposé fermé. Nous supposerons que cette surface a un endroit et un envers, c'est-à-dire qu'on ne peut pas passer d'un point situé sur une surface au point situé en face de celui-là, mais sur l'autre face sans traverser le contour. Nous appellerons alors *normale* à l'une quelconque des faces la direction qu'aurait le rayon *réfléchi* normalement à la face supposée polie. En un point de la surface, on a donc deux directions de normales opposées.

Une surface bordée ainsi par le contour s'appelle un *diaphragme*.

Nous dirons que le contour L est décrit dans le sens positif lorsque, en supposant un point mobile décrivant ce contour, un observateur

placé sur la surface du diaphragme, avec les pieds sur la surface et la tête dans le sens de la normale au diaphragme, verrait passer ce mobile devant lui *de droite à gauche*, c'est-à-dire en sens inverse des aiguilles d'une montre (sens direct de l'Astronomie et de la Mécanique).

Ceci posé, une courbe fermée L étant tracée dans un certain espace, il peut se présenter deux cas : ou bien on pourra toujours mener par la courbe L un diaphragme contenu tout entier dans l'espace considéré, et cela quelle que soit la courbe L tracée dans cet espace, ou bien on *pourra* tracer dans cet espace *une* courbe L telle qu'*aucun* diaphragme ne pourra être mené par cette courbe sans qu'il sorte de l'espace considéré. Les espaces du premier genre sont dits *acycliques* et ceux du second sont dits *cycliques*. L'espace intérieur ou extérieur à une sphère, par exemple, est un espace acyclique. Mais si nous supposons la sphère traversée par un cylindre, l'espace compris entre la sphère et le cylindre est cyclique. De même, l'espace intérieur à un anneau est cyclique; car, dans ces deux derniers cas, *on peut* tracer des courbes fermées L ne sortant pas de l'espace considéré et telles qu'il n'est pas possible de mener par ces courbes un diaphragme qui ne sorte pas de cet espace. Il suffit pour cela, dans le premier cas par exemple, de tracer une courbe fermée enveloppant le cylindre. *Tout diaphragme* mené par cette courbe devra alors évidemment couper le cylindre ou la sphère et par conséquent sortir de l'espace.

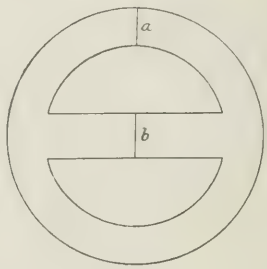
Il faut bien remarquer qu'*il n'est pas nécessaire*, pour qu'un espace soit cyclique, que toute courbe tracée dans cet espace soit nécessairement telle qu'aucun diaphragme mené par cette courbe ne soit contenu tout entier dans l'espace considéré. *Il suffit* que l'on puisse tracer de telles courbes contenues dans cet espace.

On désigne souvent aussi les espaces cycliques sous le nom d'*espaces à connexions multiples*.

Un espace à connexions multiples peut être rendu acyclique par un moyen analogue à celui que l'on emploie pour rendre uniforme une fonction polydrome. On emploie dans ce dernier cas des *coupures*. De même, on emploiera dans l'espace des *cloisons* que l'on s'impose de ne pas traverser, et le degré de connexité de l'espace est alors le nombre des cloisons nécessaires pour rendre l'espace acyclique. Par exemple, l'espace intérieur à un anneau est monoconnexe, car on le rend acyclique au moyen d'*une seule* cloison transversale dans l'anneau. Si l'anneau est traversé par un cylindre (*fig.* 49),

l'espace intérieur à l'anneau et au cylindre est *bi*connexe, car pour le rendre acyclique, il faudra établir *deux* cloisons, telles que a et b, par exemple.

Fig. 49.

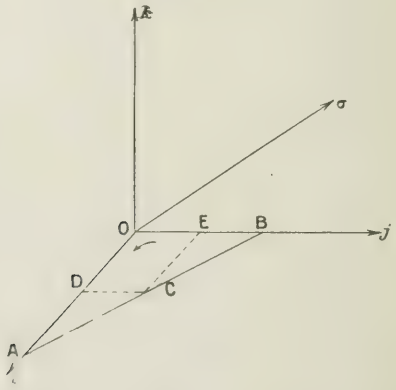


143. Théorème de Stokes. — La *circulation* d'un vecteur σ le long d'un contour fermé L *tracé dans un espace acyclique*, est égale au *flux du vecteur tourbillon* de σ à travers un diaphragme quelconque passant par L (et ne sortant pas de l'espace).

On doit supposer ici que la direction de la normale positive du diaphragme est définie de la manière que nous avons indiquée à l'article précédent.

Pour démontrer le théorème, considérons un triangle OAB (*fig.* 50),

Fig. 50.



dont la normale est k, ce qui le suppose décrit dans le sens OAB. Le vecteur d'espace, ayant la valeur σ au point O, a au point D milieu de OA la valeur $\sigma - \frac{1}{2}\frac{\partial\sigma}{\partial x}\,dx$ et, par suite, l'élément de l'intégrale

$\int \sigma\, dx$ relatif à OA sera

$$S\left(\sigma + \frac{1}{2}\frac{\partial\sigma}{\partial x}\, dx\right) i\, dx.$$

De même, on aura pour BO

$$-S\left(\sigma - \frac{1}{2}\frac{\partial\sigma}{\partial y}\, dy\right) j\, dy$$

au point C milieu de AB, σ à la valeur

$$\sigma + \frac{1}{2}\frac{\partial\sigma}{\partial x}\, dx - \frac{1}{2}\frac{\partial\sigma}{\partial y}\, dy,$$

et comme on a

$$AB = B - A = j\, dy - i\, dx,$$

l'élément d'intégrale correspondant est

$$S\left(\sigma + \frac{1}{2}\frac{\partial\sigma}{\partial x}\, dx - \frac{1}{2}\frac{\partial\sigma}{\partial y}\, dy\right)(j\, dy - i\, dx).$$

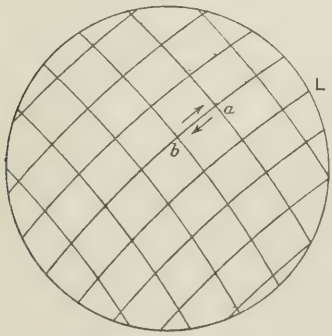
Faisant la somme des trois éléments, on obtient

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x} j - \frac{\partial\sigma}{\partial y} i\right) dx\, dy = k \operatorname{rot} \sigma\, dS.$$

Le théorème est donc démontré dans ce cas.

On l'étend alors sans difficulté au cas général. Soit (*fig.* 51) L un

Fig. 51.



contour fermé et soit un diaphragme quelconque passant par ce contour. On pourra toujours tracer sur ce diaphragme un réseau de mailles infiniment petites que l'on peut considérer comme planes. Le théorème est alors vrai pour chacun des deux triangles en les-

quels on peut décomposer chaque maille et par conséquent pour chacune des mailles. Or si l'on fait la somme

$$\int \sigma\, d\zeta$$

étendue à toutes les mailles, il est clair que σ étant une fonction continue et monodrome, deux termes communs appartenant à deux mailles voisines, tels que ab et ba donneront comme somme zéro et finalement il ne restera dans l'intégrale précédente que les termes constituant l'intégrale prise le long des côtés extérieurs des triangles limites placés au pourtour, c'est-à-dire $\int_L \sigma\, d\zeta$, et l'on aura donc

$$(1) \qquad \int_L S\sigma\, d\zeta = \int_S S n \operatorname{rot} \sigma\, dS,$$

ce qui exprime le *théorème* ou la *formule de Stokes.*

La démonstration exige que σ soit finie et déterminée, ainsi que ses dérivées premières, mais il suffit même que σ soit finie et continue, les dérivées pouvant être discontinues *sans passage par l'infini* le long d'une ligne ou en des points isolés. La démonstration est analogue à celle que nous avons rencontrée au n° 139.

L'expression cartésienne de la formule de Stokes est

$$(2) \qquad \int_L (X\, dx + Y\, dy + Z\, dz) = \int_S \left\{ \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \cos(n, x) + \ldots \right\} dS.$$

Supposons que σ soit une fonction de x et y seulement et soit contenue dans un plan fixe. On a alors $z = 0$, $Z = 0$ et l'on obtient

$$(3) \qquad \int (X\, dx - Y\, dy) = \int_S \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dS,$$

ce qui est la *formule de Riemann.*

144. Corollaires. — On déduit de la formule de Stokes de nombreuses conséquences et nous donnerons ici ses corollaires les plus importants.

I. *Le flux de la rotation d'un vecteur à travers une surface fermée est nul.*

Car ce flux est, d'après le théorème de la divergence,

$$-\int_S n \operatorname{rot} \sigma\, dS = -\int_V \operatorname{div} \operatorname{rot} \sigma\, dV = 0,$$

car div rot $= 0$ (129).

II. *L'intégrale courbe d'un vecteur le long d'une courbe fermée* (ou la circulation d'un vecteur le long d'une courbe fermée) *est nulle lorsque* rot $\sigma = 0$ [1].

III. Si un vecteur d'espace dérive d'un potentiel scalar, on a sur une surface fermée quelconque S

$$\int_S V\sigma n\, dS = 0,$$

car $\int V\sigma n\, dS = \int \operatorname{rot}\sigma\, dV = 0$, puisque $\sigma = \nabla u$ et $\operatorname{rot}\nabla = 0$.

IV. Par analogie avec la circulation d'un vecteur $-\int_L \sigma\, d\rho$, on peut appeler *circulation d'un scalar* l'intégrale curviligne

$$\varepsilon = -\int_L u\, d\rho.$$

On peut en obtenir la valeur de la manière suivante. Opérons sur cette expression par $S\gamma$, où γ est un vecteur constant. On a

$$S\gamma\varepsilon = -\gamma \int_L u\, d\rho,$$

ou bien par Stokes

$$S\gamma\varepsilon = -\int_L u\gamma\, d\rho = -\int_S n \operatorname{rot} u\gamma\, dS = \int_S S\, n V\gamma \nabla u\, dS,$$

ou enfin

$$\gamma\varepsilon = -\gamma \int_S V\, n \nabla u\, dS.$$

Mais γ étant quelconque, on a donc

$$(a) \qquad \varepsilon = -\int_L u\, d\rho = -\int_S V\, n \nabla u\, dS.$$

Sur une surface fermée, on a

$$(b) \qquad \int_S V\, n \nabla u\, dS = 0.$$

Nous allons maintenant considérer deux champs correspondant à

---

[1] Ceci a lieu en particulier lorsque le vecteur de champ σ dérive d'un potentiel scalar ou $\sigma = \nabla u$, car on a alors $\operatorname{rot}\sigma = \operatorname{rot}\nabla u = 0$.

des cas particuliers importants. Le premier est celui où l'on a, dans tout le champ,

$$\operatorname{rot}\sigma = 0.$$

Le champ possède alors un *potentiel scalaire*. Le second correspond au cas où l'on a, dans tout le champ,

$$\operatorname{div}\sigma = 0.$$

Le champ est alors *rotationnel* ou *tourbillonnaire* et dérive d'un *potentiel vectoriel*. C'est ce que nous allons montrer maintenant.

145. Champ potentiel. — On dit qu'un vecteur σ dérive d'un potentiel scalaire u, lorsque ses composantes sont les dérivées partielles d'une fonction u de x, y, z, c'est-à-dire lorsque l'on a

$$X = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad Y = \frac{\partial u}{\partial y}, \qquad Z = \frac{\partial u}{\partial z} \qquad \text{ou} \qquad \sigma = \nabla u,$$

ou bien, ce qui revient au même, lorsque

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$$

est une différentielle exacte, du, d'une fonction de x, y, z.

Les surfaces $u =$ const. s'appellent *surfaces de niveau*. Les lignes de forces leur sont perpendiculaires (**122**). Un tel champ s'appelle champ *potentiel*, *irrotationnel*, ou *lamellaire*. Pour qu'un champ dérive d'un potentiel, *il faut et il suffit* que l'on ait identiquement

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}, \qquad \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x}, \qquad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y},$$

ou bien, ce qui est la même chose, que l'on ait en chaque point du champ

$$\operatorname{rot}\sigma = 0.$$

Dans le cas où σ dérive d'un potentiel, on a donc pour toute courbe fermée tracée dans un *espace acyclique*

$$\int_L \sigma\,d\rho = 0 \qquad \text{ou} \qquad \int_L du = 0,$$

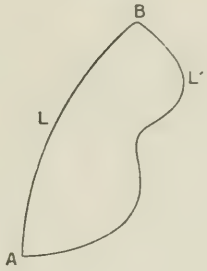
car le second membre de la formule de Stokes est identiquement nul.

Il résulte de là que si l'on considère deux points A et B dans le champ et deux chemins quelconques L et L′ entre ces deux points,

allant tous deux de A vers B, on a (*fig.* 52)

$$\int_{ALB} + \int_{BL'A} = 0.$$

Fig. 52.



Mais σ étant monodrome, on a

$$\int_{BL'A} = -\int_{ALB} = -\int_{L}.$$

On a donc

$$\int_{L} - \int_{L'} = 0$$

ou

$$\int_{L} = \int_{L'} = \int_{A}^{B} = -\int_{A}^{B} du = u_A - u_B,$$

c'est-à-dire que le travail du vecteur σ entre deux points A et B ne dépend que de ces deux points et non du chemin parcouru, en donnant au mot *travail* le sens qu'il a dans le théorème de Stokes.

Réciproquement, si la circulation d'un vecteur dans un champ donné est indépendante du chemin parcouru entre deux points du champ et ne dépend que de leur position, le vecteur dérive d'un potentiel (scalaire).

En effet, le champ étant supposé *acyclique* et la circulation du vecteur nulle sur une courbe fermée quelconque par suite de l'hypothèse, on voit que l'on a par le théorème de Stokes

$$\int n \operatorname{rot} \sigma \, dS = 0$$

sur un diaphragme quelconque mené dans le champ. Il en résulte

$$\operatorname{rot} \sigma = 0$$

et, par suite,

$$\sigma = \nabla u.$$

Le cas des espaces à connexions multiples donne lieu à des observations que nous indiquerons plus loin.

Il suit de ce qui précède que, dans un tel espace, l'intégrale de l'équation

$$\operatorname{rot}\sigma = 0$$

est donnée par

$$\sigma = \nabla u,$$

où u est une fonction scalar de ρ quelconque.

Dans le cas d'un potentiel, nous avons

$$du = -\nabla u\, d\rho = -\sigma\, d\rho,$$

car

$$\sigma = \nabla u,$$

et si nous considérons un déplacement normal à une surface de niveau, c'est-à-dire suivant la direction de σ, on aura

$$d\rho = n\, dn$$

et, par suite,

$$\frac{du}{dn} = -n\,\nabla u.$$

Or, le flux du vecteur à travers une surface S est

$$-\int n\,\sigma\, dS = -\int n\,\nabla u\, dS = \int \frac{du}{dn}\, dS.$$

On a donc, par Ostrogradsky,

$$\int \operatorname{div}\sigma\, dV = -\int \frac{du}{dn}\, dS$$

ou

$$(a) \qquad \int_V \nabla^2 u\, dV - \int_S \frac{du}{dn}\, dS = 0,$$

où S est une surface de niveau quelconque.

146. Nous avons vu, au numéro précédent, que nous avons

$$du = -\sigma\, d\rho$$

et que, en désignant par u_P la valeur de u en un point P quelconque du champ, nous avons

$$u_P - u_0 = -\int_0^P \sigma\, d\rho,$$

en désignant par O une origine d'ailleurs arbitraire où l'on se donne

la valeur u_0 de la fonction u. Posons $u_0 = 0$, ce qui est permis, car u_0 peut être choisi arbitrairement, nous aurons en un point P du champ

$$u = -\int_0^P \sigma \, d\rho,$$

la fonction u étant le potentiel scalaire.

Soit q la valeur de la divergence du vecteur σ en un point Q du champ. Le *débit* de la source placé en q est alors $q\,dV$ et cette quantité de fluide hypothétique est celle qui traverse une surface quelconque entourant le point Q. Cherchons à déterminer le vecteur de champ dû à cette source Q, en un point P dont la distance vectorielle à Q, comptée de Q vers P, est α. Ce vecteur n'est autre que la vitesse du flux au point P, c'est-à-dire la quantité de fluide qui passe au point P dans l'unité de temps. Soit a le module du vecteur. La quantité de fluide qui traverse la sphère de rayon a dans l'unité de temps étant $q\,dV$, elle sera par unité de surface

$$\frac{q\,dV}{4\pi a^2},$$

et par suite le vecteur de champ dû en P à la source Q sera

$$d\sigma = \frac{q\,dV}{4\pi a^2}\,\alpha_0 = \frac{1}{4\pi}\,\frac{q\,dV}{a^3}\,\alpha$$

ou bien, intégrant dans tout le champ et désignant par ρ le vecteur allant d'un point quelconque du champ *vers* le point P,

$$4\pi\sigma = \int \frac{q\,\rho}{r^3}\,dV.$$

Mais on a

$$q = \operatorname{div}\sigma = \operatorname{div}\nabla u = -\nabla^2 u;$$

d'où l'on déduit pour le vecteur de champ

$$\sigma = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\operatorname{div}\sigma}{r^3}\,\rho\,dV = -\frac{1}{4\pi}\int \nabla^2 u\,\frac{\rho}{r^3}\,dV.$$

Nous avons ainsi le vecteur de champ en fonction des sources. Cherchons à obtenir le potentiel. Nous avons

$$du = -\sigma\,d\rho.$$

L'élément dû à la source q sera donc l'intégrale $-\int \sigma\,d\rho$, où σ pro-

vient de la source q. Or

$$d\sigma\, d\rho = -\frac{1}{4\pi}\frac{q\,dV}{a^4}\,\alpha\, d\rho = -\frac{1}{4\pi}\frac{q\,dV}{a^2}\,\alpha_0\, d\rho.$$

Mais $\alpha_0\, d\rho = -da$. Donc on a pour le potentiel dû à cette source q

$$du = \frac{1}{4\pi}\int \frac{q\,dV\,da}{a^2} = -\frac{1}{4\pi}\frac{q\,dV}{a}$$

et, par suite,

$$u = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{q\,dV}{r}.$$

En résumé, si nous posons comme d'usage

$$\operatorname{div}\sigma = 4\pi m,$$

nous avons pour un champ potentiel les relations suivantes :

$$(1)\qquad \sigma = \nabla u = -\int \frac{m\rho}{r^3}\,dV,$$

$$(2)\qquad u = -\int \frac{m\,dV}{r},$$

$$(3)\qquad 4\pi m = \operatorname{div}\sigma = -\nabla^2 u.$$

Cette dernière équation est l'*équation de Poisson*. Elle admet l'intégrale particulière

$$u = -\int \frac{m\,dV}{r}.$$

147. Champ tourbillonnaire. — Nous considérons maintenant un deuxième cas particulier, c'est-à-dire celui où l'on a dans tout le champ

$$\operatorname{div}\sigma = 0.$$

On voit alors par Ostogradsky que le flux du vecteur à travers une surface fermée quelconque est nul et que la réciproque est vraie.

Dans un champ à divergence nulle, le flux du vecteur à travers une surface fermée quelconque est nul, et réciproquement.

La condition $\operatorname{div}\sigma = 0$ est souvent appelée *condition d'incompressibilité*. Cela provient de ce que, si l'on considère le champ comme un champ de vitesses, la condition $\operatorname{div}\sigma = 0$ exprime qu'il entre autant de fluide qu'il en sort dans une surface quelconque, condition qui se trouve réalisée dans le mouvement d'un fluide incompressible naturel.

Un champ de divergence nulle peut être regardé comme formé

par les tourbillons d'un autre champ. En d'autres termes, si l'on a $\operatorname{div}\sigma = 0$, on peut trouver une fonction ϖ telle que

$$\operatorname{rot}\varpi = \sigma.$$

Le problème comporte même une infinité de solutions, ce qui se reconnaît *a priori*, à condition que l'on admette l'existence d'une solution particulière ϖ_1. On aura, en effet,

$$\operatorname{rot}(\varpi - \varpi_1) = 0,$$

condition qui exprime que $\varpi - \varpi_1$ est une différentielle exacte et que par conséquent on a

$$\varpi = \varpi_1 + \nabla u,$$

où u est une fonction quelconque scalar de ρ.

Nous sommes donc ramenés à chercher une solution particulière ϖ_1 de l'équation

$$\operatorname{rot}\varpi = \sigma. \tag{1}$$

Prenons pour cela une inconnue auxiliaire μ telle que l'on ait

$$\varpi = \operatorname{rot}\mu. \tag{2}$$

On aura alors

$$\operatorname{rot}^2\mu = \sigma$$

ou (130)

$$\nabla^2\mu - \nabla\operatorname{div}\mu = \sigma.$$

Puisque nous ne cherchons qu'une solution particulière, nous pouvons encore particulariser le problème en imposant à μ la condition

$$\operatorname{div}\mu = 0$$

et nous nous trouvons ainsi ramenés à l'équation

$$\nabla^2\mu = \sigma$$

qui se décompose en trois autres :

$$\nabla^2\mu_1 = X, \qquad \nabla^2\mu_2 = Y, \qquad \nabla^2\mu_3 = Z$$

en posant

$$\mu = \mu_1 i + \mu_2 j + \mu_3 k.$$

Or ces équations sont des équations de Poisson (146) qui admettent les intégrales

$$\mu_1 = -\frac{1}{4\pi}\int\frac{X\,dV}{r}, \qquad \mu_2 = -\frac{1}{4\pi}\int\frac{Y\,dV}{r}, \qquad \mu_3 = -\frac{1}{4\pi}\int\frac{Z\,dV}{r},$$

de sorte que l'on a

$$\mu = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\sigma\, dV}{r}. \tag{3}$$

Ce qui nous donne une solution particulière

$$w_1 = \operatorname{rot}\mu = -\frac{1}{4\pi}\operatorname{rot}\int \frac{\sigma\, dV}{r} \text{ (1)}.$$

On voit donc que :

Un champ de divergence nulle peut être regardé d'une infinité de manières comme formé par les tourbillons des vecteurs d'un autre champ.

Considérons alors dans un tel champ un contour quelconque L. Le flux du vecteur à travers un diaphragme quelconque passant par L a pour expression, d'après ce qui précède,

$$-\int_S n\sigma\, dS = -\int_S n \operatorname{rot} w\, dS = -\int_L w\, d\rho \qquad \text{(par Stokes)}$$

qui ne dépend que du contour L. Le résultat est d'ailleurs le même, quelle que soit la fonction particulière w choisie, car on a

$$w = w_1 - \nabla u$$

et alors

$$\int_L w\, d\rho = \int_L w_1\, d\rho - \int_L \nabla u\, d\rho$$

et cette dernière intégrale est nulle (144). Donc :

Dans un champ de divergence nulle, le flux du vecteur à travers une surface continue quelconque limitée à un contour ne dépend que de ce contour : elle s'exprime par une intégrale simple prise le long de ce contour.

148. Potentiel vectoriel. Étant donné un espace tourbillonnaire dans lequel on a donc en chaque point

$$\operatorname{div}\sigma = 0$$

(1) On trouvera au chapitre XVI (n° 189) une importante application de cette formule.

et où est connu le vecteur tourbillon en chaque point

$$(1) \qquad w = \operatorname{rot} \sigma,$$

on peut se proposer un problème analogue à celui que nous avons résolu au n° 146 pour un champ potentiel, c'est-à-dire trouver le vecteur de champ, ou, en d'autres termes, intégrer l'équation (1). Le calcul du n° 147 nous donne une solution du problème. Soit donné

$$(1') \qquad \operatorname{rot} \sigma = 4\pi w,$$

où nous introduisons le facteur numérique 4π par convenance; puisque l'on a $\operatorname{div} \sigma = 0$, nous pouvons poser

$$\sigma = \operatorname{rot} \mu,$$

d'où

$$4\pi w = \operatorname{rot}^2 \mu.$$

Nous avons alors, par (3), une solution de cette équation (avec $\operatorname{div} \mu = 0$) :

$$(2) \qquad \mu = -\int \frac{w\, dV}{r}.$$

Cette formule est tout à fait semblable à celle qui donne le potentiel scalar u quand on connaît les sources $4\pi m$:

$$u = -\int \frac{m\, dV}{r},$$

les sources $4\pi m$ étant seulement remplacées par les vecteurs tourbillons $4\pi w$. On appelle cette fonction *potentiel vectoriel*. Le vecteur de champ en dérive par l'opération rot, de même que le vecteur de champ dans le cas du potentiel scalar u dérive de u par l'opération ∇.

On a aussi, dans le cas du potentiel scalaire,

$$4\pi m = -\nabla^2 u,$$

et de même dans le cas du potentiel vectoriel,

$$4\pi w = -\nabla^2 \mu.$$

Gibbs [1] a donné le nom de *potentiel* et désigne par pot l'opération qui consiste à fermer le potentiel scalar ou vectoriel au moyen

---

[1] *Vector Analysis*. Newhaven, Art. 91 et suiv. 1881-1884.

d'une fonction scalar ou vectorielle donnée. On aurait ainsi

$$u = \operatorname{pot} m,$$

$$\mu = \operatorname{pot} w,$$

de sorte que l'opération pot est équivalente à $-\int \frac{(\ )\,dV}{r}$. Elle est aussi l'opération inverse de ∇^2.

Nous renvoyons le lecteur, à ce sujet, à l'Ouvrage de Föppl *Géométrie der Wirbelfelder* [1], dans lequel il trouvera, exposée d'une manière très élémentaire, une intéressante théorie des champs vectoriels et du potentiel vectoriel (Chap. III et IV). La notation de Föppl est la même que celle que nous employons ici, mais le produit scalaire est pris avec le signe $+$.

149. **Variation de la circulation et du flux.** — Supposons qu'un vecteur d'espace σ dépende d'une variable scalar t, le temps par exemple, en même temps qu'il est fonction de ρ. Nous cherchons à obtenir la *dérivée de la circulation* de ce vecteur par rapport au temps, c'est-à-dire

$$\frac{dC}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_L \sigma\, d\rho.$$

La variation totale du vecteur σ est (129)

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\partial\sigma}{\partial t} - (\varepsilon\nabla)\sigma.$$

On a donc

$$(1)\qquad \frac{dC}{dt} = -\int_L \frac{d\sigma}{dt}\, d\rho = -\int_L \left[\frac{\partial\sigma}{\partial t} - (\varepsilon\nabla)\sigma\right] d\rho,$$

où ε doit être regardé comme constant d'après la nature même de l'expression $(\varepsilon\nabla)\sigma$. Cette expression peut recevoir diverses transformations. On a

$$(\varepsilon\nabla)\sigma = \operatorname{rot} V\varepsilon\sigma - \varepsilon \operatorname{div}\sigma = V\varepsilon \operatorname{rot}\sigma - \nabla(\varepsilon\sigma).$$

On peut donc écrire

$$(2)\qquad \frac{dC}{dt} = \int_L \left(\frac{\partial\sigma}{\partial t} - \nabla\varepsilon\sigma - V\varepsilon \operatorname{rot}\sigma\right) d\rho.$$

---

(1) Leipzig, Teubner, 1897.

Si la courbe L est fermée, on a (144)

$$\int \nabla(\varepsilon\sigma)\,d\rho = 0$$

et la formule se réduit à

$$(3)\qquad \frac{dC}{dt} = -\int_L \left(\frac{\partial\sigma}{\partial t} - V\varepsilon \operatorname{rot}\sigma\right) d\rho.$$

On peut de même chercher la *variation du flux* du vecteur à travers une surface S. On aura de la même manière

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_S n\sigma\,dS = -\int_S \left[n\frac{\partial\sigma}{\partial t} - (\varepsilon\nabla)\sigma\right] dS$$

et par suite

$$(4)\qquad \frac{d\Phi}{dt} = -\int_S \left(\frac{\partial\sigma}{\partial t} + \varepsilon \operatorname{div}\sigma + \operatorname{rot} V\sigma\varepsilon\right) n\,dS.$$

En posant $\operatorname{div}\sigma = u$, où u est un scalar arbitraire, on peut écrire

$$(5)\qquad \frac{d}{dt}\int_V u\,dV = \int_V \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(u\varepsilon)\right] dV$$

dans le cas où la surface S est *fermée*. On a en effet, dans ce cas,

$$(6)\qquad \int_S n \operatorname{rot} V\sigma\varepsilon\,dS = 0$$

et la formule (4) devient

$$(7)\qquad \frac{d\Phi}{dt} = -\int_S \left(\frac{\partial\sigma}{\partial t} + \varepsilon \operatorname{div}\sigma\right) n\,dS = \int_V \operatorname{div}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial t} + \varepsilon \operatorname{div}\sigma\right) dV$$

ou bien, puisque les signes div et ∂ sont interchangeables,

$$(8)\qquad \frac{d\Phi}{dt} = \int_V \left[\frac{\partial \operatorname{div}\sigma}{\partial t} + \operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{div}\sigma)\right] dV,$$

ce qui donne (5).

150. Formules de Green. — On sait qu'une fonction scalar de x, y, z, ou de ρ est dite *régulière* dans un volume V, si elle admet des dérivées secondes continues dans le volume V et finies sur la surface S qui limite ce volume. Il en résulte que les dérivées premières et la fonction elle-même sont continues dans le volume V et sur la surface S.

On dit d'autre part qu'une fonction scalar u est *harmonique* si elle satisfait à l'équation de Laplace

$$\nabla^2 u = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Nous supposons dans ce qui suit que nous considérons des fonctions *régulières* dans le volume V. Soit σ une fonction vectorielle d'espace, on a par le théorème de la divergence (normale intérieure)

$$\int \operatorname{div} \sigma \, dV = \int n \sigma \, dS.$$

Remplaçons σ par le produit d'un vecteur σ et d'un scalar u, le vecteur et le scalar étant supposés continus et finis dans l'espace considéré. On a

$$\int \operatorname{div}(u\sigma) \, dV = \int u n \sigma \, dS.$$

Mais on a (**127**)

$$\operatorname{div} u\sigma = u \operatorname{div} \sigma - \sigma \nabla u.$$

Posons $\sigma = \nabla v$, nous aurons

$$(1) \qquad -\int u \nabla^2 v \, dV - \int \nabla u \nabla v \, dV = \int u n \nabla v \, dS.$$

Changeons u en v et v en u et retranchons, il vient

$$\int (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u) \, dV + \int (u \nabla v - v \nabla u) n \, dS = 0.$$

Mais on a (**123**)

$$n \nabla u = -\frac{du}{dn}.$$

On a donc

$$(2) \qquad \int (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u) \, dV = \int \left(u \frac{dv}{dn} - v \frac{du}{dn} \right) dS.$$

C'est la *formule de Green*.

Si $v = u$, on a la *deuxième formule* [par (1)]

$$(3) \qquad \int [u \nabla^2 u + (\nabla u)^2] \, dV = \int u \frac{du}{dn} \, dS.$$

Enfin si u satisfait à l'équation de Laplace, on a

$$(4) \qquad \int (\nabla u)^2 \, dV = \int u \frac{du}{dn} \, dS.$$

On a un cas particulier, en posant dans (2) $v = 1$ et en supposant que u est une fonction harmonique,

$$(5) \qquad \int \frac{du}{dn}\, dS = 0 \qquad \text{ou} \qquad \int (\nabla u)_n\, dS = 0$$

qui s'obtiendrait d'ailleurs directement par le théorème de la divergence.

151. Deuxième formule de Green. — Supposons que u et v soient des fonctions harmoniques et régulières dans V et sur S. La formule (2) nous donne alors

$$\int \left(u \frac{dv}{dn} - v \frac{du}{dn} \right) dS = 0.$$

La fonction

$$v = \frac{1}{r}$$

satisfait bien à l'équation de Laplace, mais *elle n'est pas régulière* à l'origine, si l'origine est intérieure au volume V. On a donc bien

$$\int \left(u \frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{1}{r} \frac{du}{dn} \right) dS = 0$$

si le point A (a, b, c), dont la distance à un point (x, y, z) intérieur au volume V et r, est *extérieur* au volume, mais on ne peut appliquer cette équation dans le cas où A est un point *intérieur*. Nous allons dans ce cas calculer la valeur du premier membre.

Nous employons la méthode générale des discontinuités en entourant le point A d'une petite sphère S′ et nous prenons l'intégrale en comptant la direction positive de la normale vers l'intérieur de V, c'est-à-dire vers l'intérieur de S et vers l'extérieur de S′. Nous avons alors

$$\int_S + \int_{S'} = 0.$$

La première intégrale ne dépend pas du rayon ε de la sphère S′. La seconde n'en dépend donc pas non plus et nous pouvons supposer ε infiniment petit. Or l'intégrale S′ comprend deux parties. La seconde est

$$-\int_{S'} \frac{1}{r} \frac{du}{dn'}\, dS' = -\frac{1}{\varepsilon} \int_{S'} \frac{du}{dn'}\, dS'$$

qui est nulle par (5).

La première est

$$\int u \frac{d\frac{1}{r}}{dn'} dS' = -\int u \nabla \frac{1}{r} \varrho_0 dS' = -\int u \frac{\varrho_0}{r_2} \varrho_0 dS = -\int \frac{u}{r^2} dS'.$$

Mais u étant continu, sa valeur sur la sphère sera donnée par $u_0 + \eta_1$, où η_1 est une fonction infiniment petite, et l'on aura

$$\int_{S'} = -\int (u_0 + \eta_1) \frac{dS'}{r^2}$$

et à la limite

$$\int_{S'} = -4\pi u_0,$$

car $\int \frac{ds'}{r^2} = 4\pi$. On a donc la formule

$$(g) \qquad \int \left(u \frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{1}{r} \frac{du}{dn} \right) dS = 4\pi u_0$$

pour un point intérieur au volume V, u_0 étant la valeur de u en ce point. Cette formule est la *deuxième formule de Green*.

Remarque. — La formule (1) du n° 150 existe encore si l'on remplace u par $\frac{u}{r}$, c'est-à-dire que l'on a

$$(6) \qquad \int_V \left(\frac{u}{r} \nabla^2 v + \nabla \frac{u}{r} \nabla v \right) dV + \int_S \frac{u}{r} n \nabla v \, dS = 0$$

ou

$$(6) \qquad \int_V \left(\frac{u}{r} \nabla^2 v - \nabla \frac{u}{r} \nabla v \right) dV = \int_S \frac{u}{r} \frac{dv}{dn} dS.$$

Cela résulte de ce que l'on peut remplacer σ par $\frac{\sigma}{r}$ dans le théorème de la divergence qui a servi à l'établir. Mais il n'en est pas de même pour v. On ne peut le remplacer par $\frac{v}{r}$ parce que les dérivées secondes interviennent.

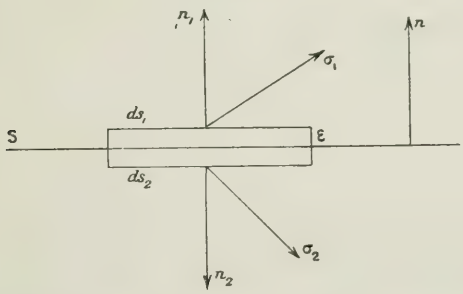
152. Discontinuités. — Nous avons toujours supposé jusqu'à ce moment que les vecteurs étaient des fonctions continues de l'espace. Cependant les applications présentent certains cas où il en est autrement et où un vecteur d'espace change brusquement de valeur en un point, ou le long d'une ligne ou d'une surface de discontinuité. On en rencontre de nombreux exemples en électricité. Un des

plus élémentairement connus est le fait de l'action d'un conducteur sur une masse électrique unité extérieure au conducteur. Cette action devient brusquement nulle au passage de la couche, car on sait que la force électrique à l'intérieur d'un conducteur est égale à zéro. La surface de ce conducteur, qui est une surface de niveau, est donc une surface de discontinuité pour le vecteur force. Le procédé employé pour étudier ces cas spéciaux est celui dont il a été parlé au n° 135. On appliquera les théorèmes précédents en y introduisant les espaces compris entre les surfaces d'isolement et la surface qui délimite le volume total et en ajoutant les intégrales ainsi obtenues. Il y aura lieu dans chaque cas de faire une discussion particulière suivant la nature du problème, mais on peut cependant indiquer quelques observations générales se rapportant à l'application du théorème de la divergence et du théorème de Stokes.

Dans le cas du théorème de la divergence, on a un fait important qui se présente le long d'une surface de discontinuité et qui consiste en ce que *la divergence devient infinie en chaque point de cette surface, mais que le produit de la divergence par la distance des deux surfaces isolantes reste fini.*

Pour nous en rendre compte, considérons deux éléments de surfaces isolantes ds_1 et ds_2 (*fig.* 53) limitant un cylindre normal à la

Fig. 53.



surface de discontinuité S et de hauteur ε, ε étant infiniment petit par rapport à la dimension des bases ds_1 et ds_2 (135). Le théorème de la divergence appliqué à ce cylindre donne

$$\operatorname{div}\sigma . \varepsilon\, dS = -n_1\sigma_1\, dS_1 - n_2\sigma_2\, dS_2,$$

en négligeant la périphérie du cylindre qui est d'ordre supérieur. On peut poser $ds_1 = ds_2 = ds$, et alors

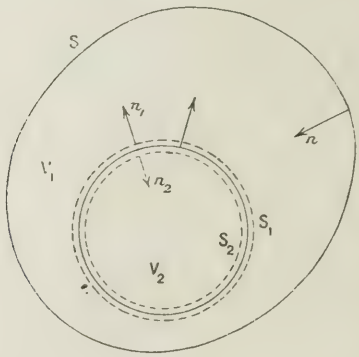
$$\varepsilon \operatorname{div}\sigma = -n_1\sigma_1 - n_2\sigma_2.$$

Mais $-n_1\sigma_1$ est la *composante normale* de σ_1 (prise dans la direction n) et $-n_2$ est la composante normale de σ_2 (prise dans la direction $-n$). Par suite, il en résulte que le second membre est la variation de la composante normale de σ quand on passe d'un côté à l'autre de la surface de discontinuité, différence qui est *finie*. On voit donc, puisque ε est infiniment petit, que $\operatorname{div}\sigma$ devient infini en chaque point de la surface de discontinuité, tandis que le produit $\varepsilon \operatorname{div}\sigma$ reste fini et a en chaque point une valeur déterminée égale à la valeur scalaire de la différence des composantes normales du vecteur de champ d'un côté à l'autre de la surface de discontinuité.

Le produit $\varepsilon \operatorname{div}\sigma$ s'appelle la *densité superficielle* au point considéré de la surface. *La densité spatiale* en ce point, $\operatorname{div}\sigma$, est *infinie*, c'est-à-dire qu'elle cesse d'avoir un sens.

Soit, par exemple, une surface S contenant un volume V et soit S′ une surface intérieure de discontinuité renfermant le volume V_2 (*fig.* 54). Entourons la surface S′ de deux autres surfaces S_1 et S_2 et

Fig. 54.



appliquons successivement le théorème de la divergence aux deux volumes V_1 et V_2 compris en dehors de S_1 et en dedans de S_2. La direction positive de la normale sur S étant intérieure, elle sera pour S_1 extérieure et pour S_2 intérieure. Soient σ_1 et σ_2 les valeurs de σ dans le premier et second espace. On a

$$\int_{V_1} \operatorname{div}\sigma_1\, dV = \int_S \sigma_1 n\, dS - \int_{S_1} \sigma_1 n_1\, dS$$

et

$$\int_{V_2} \operatorname{div}\sigma\, dV = \int_{S_2} \sigma_2 n_2\, dS_2.$$

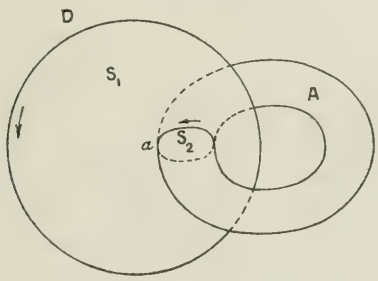
Par addition, en remarquant que, à la limite $V_1 + V_2 = V$ et que $n_2 = -n_1$,

$$\int_V \operatorname{div} \sigma \, dV = \int_{S'} (\sigma_1 - \sigma_2) n_1 \, dS' + \int_S \sigma n \, dS,$$

c'est-à-dire que le théorème de Gauss est modifié en ce qu'il faut ajouter au second membre une intégrale de surface prise sur la surface de discontinuité et dépendant de la discontinuité des composantes normales du vecteur de champ sur cette surface. La quantité $(\sigma_1 - \sigma_2) n$ est la *densité superficielle*.

Si maintenant, au lieu de considérer le théorème de la divergence nous considérons le théorème de Stokes dans un espace où existe une surface de discontinuité, nous arrivons à un résultat analogue, avec cette différence que ce sont ici les composantes *tangentielles* de σ sur la surface de discontinuité qui entrent en ligne de compte. Soit par exemple une surface de discontinuité constituée par un anneau A (*fig.* 55), semblable à un tore. Si nous considérons une courbe D qui

Fig. 55.



entoure cet anneau, tout diaphragme mené par D coupera la surface de discontinuité suivant une courbe, que nous isolons, comme il a été dit précédemment. Soit S_1 la surface du diaphragme extérieur à l'anneau et S_2 la surface intérieure. Appliquons à S_1 le théorème de Stokes

$$\int_{S_1} n \operatorname{rot} \sigma_1 \, dS_1 = \int_D \sigma_1 \, d\rho + \int_a \sigma_1 \, d\rho$$

et pour S_2, on a

$$\int_{S_2} n \operatorname{rot} \sigma_2 \, dS_2 = - \int_a \sigma_2 \, d\rho$$

en tenant compte que pour S_1 et S_2 le sens de description (142) est

différent. On en déduit, puisque $S = S_1 + S_2$,

$$\int_S n \operatorname{rot} \sigma \, dS = \int_a (\sigma_1 - \sigma_2) \, d\rho - \int_D \sigma \, d\rho.$$

C'est-à-dire qu'il faut ajouter au second membre une intégrale de ligne qui provient des composantes tangentielles de σ sur la surface de discontinuité.

153. Parvenus à ce point nous pensons que le but que nous nous étions proposé, c'est-à-dire de permettre au lecteur l'étude des Ouvrages écrits en notation vectorielle et l'application de ces méthodes à ses propres travaux, est suffisamment atteint. Les développements ultérieurs ont surtout leur intérêt dans telle ou telle application déterminée des principes essentiels que nous avons exposés. Les applications existantes sont actuellement assez nombreuses pour que chacun puisse y trouver celles qui conviennent le mieux au genre qui l'intéresse personnellement. Cependant, nous devons ajouter que les applications géométriques, où il y aurait sans doute beaucoup à faire, sont de beaucoup les moins développées. Il est vrai que les éléments d'Hamilton en traitent un très grand nombre d'une façon très approfondie, et à ce titre la lecture de cet Ouvrage ne saurait être trop recommandée. Les applications mécaniques et physiques sont beaucoup plus importantes dans la littérature scientifique actuelle, et elles le deviendront certainement de plus en plus, car le langage vectoriel est la langue même de la Physique. Dans le but d'exercer le lecteur au maniement des formules et des opérateurs nouveaux, nous avons pensé toutefois qu'il serait utile de donner ici, ainsi que nous l'avons fait pour les éléments du calcul des formes et pour le calcul vectoriel dérivé des quaternions, quelques applications choisies parmi le plus caractéristiques. Nous avons choisi dans ce but les sujets suivants que nous avons succinctement traités de la manière qui nous a paru la plus utile au point de vue spécial qui nous occupe.

1° Le *potentiel newtonien* au point de vue de l'application de la notion de gradient.

2° Le *mouvement d'un solide autour d'un point fixe* qui introduit la fonction linéaire autoconjuguée.

3° Les notions élémentaires de la *théorie de l'Élasticité* dans un milieu isotrope qui introduit la divergence et le curl.

4° Un cas particulier de la *théorie de la double réfraction* où s'introduit une fonction linéaire non symétrique.

Nous pensons que ces exemples suffiront à faire comprendre au lecteur la nature des procédés employés par le calcul vectoriel dans ses divers champs d'application.

En vue des études ultérieures nous résumons ici dans un Tableau les principales notations comparatives des auteurs vectoristes en les rapportant à celles qui sont employées dans ce Livre. Ce Tableau est en partie emprunté à l'introduction de l'Ouvrage de M. J. Guiot, déjà cité.

	Hamilton.	Grassmann.	Gibbs.	Burali-Forti.	Jaumann.	Véronnet (notation dite française).
Produit scalaire.....	$\underline{-S\alpha\beta}$	$[\alpha \mid \beta]$	$\alpha . \beta$	$\alpha \times \beta$	$\alpha . \beta$	$\alpha\beta$
» vectoriel.....	$\underline{V\alpha\beta}$	$\lvert[\alpha\beta]$	$\alpha \times \beta$	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \times \beta$	$\overline{\alpha\beta}$
» quaternion...	$\underline{\alpha . \beta}$					
» dyadique scalaire.....			$\underline{(\alpha\beta) . \rho}$		$(\alpha : \beta) \rho$	
» dyadique vectoriel.....			$(\alpha\beta) \times \rho$		$(\alpha \times \beta) \rho$	
Nabla.....	$\underline{\nabla}$				∇	D
Gradient.....	$\underline{\nabla}$		$\underline{\nabla}$	grad.	grad.	grad.
Curl.....	$V\nabla$		$\nabla \times$	$\underline{\text{rot}}$	rot ou V	curl.
Divergence.....	$-S\nabla$		$\nabla .$	$\underline{\text{div}}$	div ou ∇	div.
Laplacien.....	$\underline{-\nabla^2}$		$\nabla . \nabla$	Δ_1, Δ_2	∇^2	D^2

Les notations soulignées sont celles que nous avons adoptées dans notre Précis.

EXERCICE SUR LE CHAPITRE XII.

154. I. La formule suivante donne une application souvent utile du théorème de la divergence. Soit σ une fonction monodrome et continue dans un volume V et sur une surface S ainsi que ses dérivées, c'est-à-dire telle que le théorème de la divergence puisse s'appliquer. Supposons que σ soit une fonction linéaire du vecteur unité n, et que pour les *points de la surface*, n soit le vecteur unité normal intérieurement à la surface. Soient σ_i, σ_j, σ_k les valeurs que prend σ quand on y remplace n par i, j, k. On a la formule suivante :

$$\int \sigma \, dS = -\int \left(\frac{\partial \sigma_i}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_j}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_k}{\partial z} \right) dV.$$

On peut, en effet, écrire

$$\sigma = -(\sigma_i i + \sigma_j j + \sigma_k k)n.$$

La composante scalaire de σ suivant Ox est (changée de signe)

$$i\sigma = (i\sigma_i)\cos\alpha + (i\sigma_j)\cos\beta - (i\sigma_k)\cos\gamma,$$

α, β, γ étant les angles de σ avec les axes. On en déduit, par le théorème de la divergence [n° 139 (2)],

$$\int i\sigma\, dS = -\int_V \left[\frac{\partial(i\sigma_i)}{\partial x} + \frac{\partial(i\sigma_j)}{\partial y} + \frac{\partial(i\sigma_k)}{\partial z}\right] dV$$
$$= -\int_V S\, i\left(\frac{\partial\sigma_i}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_j}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_k}{\partial z}\right) dV$$

et deux analogues pour les valeurs de

$$\int j\sigma\, dS \quad \text{et} \quad \int k\sigma\, dS.$$

Multipliant respectivement ces équations par i, j, k, et ajoutant, on trouve l'équation proposée.

II. Transformer par le même procédé l'intégrale

$$\int V\rho\sigma\, ds.$$

On écrit

$$V\rho\sigma = V\rho\sigma_i\cos\alpha - V\rho\sigma_j\cos\beta - V\rho\sigma_k\cos\gamma.$$

En procédant exactement de la même manière, on trouve

$$\int V\rho\sigma\, dS = -\int \left\{ V\rho\left(\frac{\partial\sigma_i}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_j}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_k}{\partial z}\right) + V(i\sigma_i + j\sigma_j + k\sigma_k)\right\} dV.$$

CHAPITRE XIII.

POTENTIELS NEWTONIENS [1].

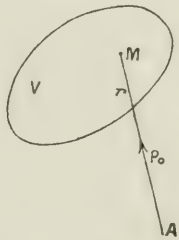
155. Potentiel de volume. — Considérons un corps limité de volume V dont la densité en chaque point, que nous désignerons par μ, est une fonction continue des coordonnées de ce point, et supposons que ce corps attire suivant la loi de Newton un point matériel A ne faisant pas partie du corps V et dont nous supposons que la masse est prise égale à l'unité. Nous supposerons d'abord que le point A est *extérieur* au corps attirant.

La force élémentaire d'attraction exercée sur le point A par un élément de volume dV, placé au point M du corps, est

$$\frac{\mu\, dV}{r^2}\,\rho_0 = -\mu\, dV\, \nabla \frac{1}{r},$$

le vecteur ρ_0 étant dirigé du point A *vers* le point M, et en supposant

Fig. 56.



que le coefficient de proportionnalité f de la formule de Newton est posé égal à l'unité. La force totale d'attraction sur le point A est alors

$$F = -\int_V \mu\, dV\, \nabla_A \frac{1}{r}$$

[1] La plus grande partie de ce Chapitre est résumée des leçons sur les potentiels newtoniens du *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique* de Hadamard (Cours autographié 1914); nous nous sommes aidé aussi du Chapitre consacré à cet objet dans la *Theoritische Mechanik* de Marcolongo (Traduction Timerding), 11e Partie, Chap. VI.

en indiquant par l'indice A que dans $\nabla \frac{1}{r}$ ce sont les coordonnées du point A qui sont soumises à l'opération ∇. L'intégration s'étend à tout le volume V. Le produit $\mu\, dV$ étant indépendant de A, on peut écrire

$$F = + \nabla_A u$$

en posant

$$u = \int \frac{\mu\, dV}{r}.$$

La fonction ainsi définie porte le nom de *potentiel*. Elle est évidemment continue pour tout point extérieur au volume V puisque r ne s'y annule pas.

On a alors

$$\nabla_A^2 u = -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial c^2}\right) = \int \mu\, dV\, \nabla^2 \frac{1}{r} = 0,$$

car $\nabla^2 \frac{1}{r} = 0$. C'est l'*équation de Laplace* valable pour un point *extérieur* au volume attirant.

Nous remarquerons en passant que si le corps attirant se réduit à un point M, nous avons

$$\nabla_A \frac{1}{r} = -\nabla_M \frac{1}{r},$$

ρ_0 ayant toujours la direction de A vers M et l'on a aussi dans ce cas

$$\nabla_M^2 \frac{1}{r} = 0,$$

où r est considéré comme fonction de x, y, z et non de a, b, c.

156. Cas d'un point attiré intérieur. — La fonction $\frac{1}{r}$ est alors discontinue avec passage par l'infini au point A. Cependant le potentiel a en ce point une valeur finie et déterminée. En effet, u est une intégrale triple dans laquelle, en appliquant la méthode des singularités avec une petite sphère ayant son centre au point A, on voit que μ est $\leqq$ une constante μ_0 qui est le maximum de la densité à l'intérieur du volume V. On a donc, pour tous les points intérieurs à la petite sphère,

$$\operatorname{mod} \frac{\mu}{r} = \frac{\mu_0}{r^\alpha},$$

où $\alpha = 1 < 3$. Il en résulte que u est fini et déterminé (n° **136**, c). Il

en est de même pour F, car $\nabla_A u$ ne contient au dénominateur que r^2 ($2 < 3$) et le numérateur est fini. On voit que u et F sont déterminés et finis *dans tout l'espace*.

Mais on ne peut rien affirmer pour $\nabla^2 u$ qui dépend de $\frac{1}{r^3}$. Nous allons montrer que $\nabla^2 u$ est encore déterminé et fini dans tout l'espace, *excepté* sur la surface qui limite le volume V.

Pour cela nous transformerons ∇^2 en une somme d'une intégrale de surface et d'une intégrale de volume au moyen de la formule de la divergence qui s'applique à ∇u (n° 139, III). On a

$$\nabla u = \int_V \mu \nabla_A \left(\frac{1}{r}\right) dV = -\int_V \mu \nabla_M \left(\frac{1}{r}\right) dV$$
$$= -\int_V \nabla_M \left(\frac{\mu}{r}\right) dV + \int_V \frac{1}{r} \nabla \mu \, dV.$$

Le premier terme s'écrit au moyen du théorème du gradient (n° 140) sous forme d'une intégrale de surface, et l'on a

$$\nabla u = \int_S \frac{\mu}{r} n \, dS + \int_V \frac{\nabla \mu}{r} dV,$$

ce qui donne la somme d'une intégrale de surface et d'un potentiel de volume dont la densité est $\nabla_M \mu$. Ce dernier est dérivable dans tout l'espace. Quant à l'intégrale de surface elle l'est aussi puisque r n'y devient pas nul, excepté sur la surface de séparation S du volume V. Il en résulte que $\nabla^2 u$ a une valeur finie et déterminée pour tous les points de l'espace, excepté peut-être pour les points de la surface S. Nous allons calculer directement la valeur de cette fonction qui n'est autre que

$$\nabla^2 u = -\operatorname{div} \nabla u = -\operatorname{div} F,$$

où les dérivées sont prises par rapport à A.

Nous avons déjà trouvé [n° 146, (3)] pour un champ potentiel l'expression

$$\nabla^2 u = -4\pi m$$

qui nous donnerait ici

$$\nabla^2 u = -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial c^2}\right) = 4\pi\mu_0,$$

où μ_0 est la densité au point A. Nous allons retrouver ce résultat par une autre méthode. Entourons le point A d'une petite sphère c_2. Le volume V est ainsi divisé en deux parties, l'une v, extérieure à la

sphère, l'autre v_2 intérieure. Soit Σ la surface de la sphère, nous pouvons différentier u dans l'espace v_1 et pour l'espace v_2 appliquer la formule de décomposition précédente, on a alors

$$\nabla u = \int_{v_1} \nabla\left(\frac{1}{r}\right) dV - \int_{\Sigma} \frac{\mu}{r} n\, d\Sigma - \int_{v_2} \nabla\mu\, dV,$$

le signe $-$ provenant de ce que la normale n est ici *extérieure* à la sphère.

Opérons sur les deux membres par div. Le premier membre devient $-\nabla^2 u$. La première intégrale du second membre contient $\nabla^2 \frac{1}{r}$. Elle est nulle. La troisième est également nulle, car son module est $\leqq N \int_{v_2} \frac{dV}{r}$, où N est une quantité finie, et elle est évidemment nulle, dV étant du troisième ordre, tandis que r n'est que du premier. Il reste donc

$$+\nabla^2 u = \lim_{\Sigma=0} \int_{\Sigma} \operatorname{div} \frac{\mu}{r}\, n\, d\Sigma.$$

Mais μ étant continu aux environs du point A, on peut poser sur la sphère

$$\mu = \mu_0(1 + \eta),$$

η étant une fonction infiniment petite. L'intégrale devient donc

$$\mu_0 \int_{\Sigma} \operatorname{div} \frac{n}{r}\, d\Sigma + \lim_{\Sigma=0} \int_{\Sigma} \operatorname{div} \frac{\eta\mu_0 n}{r}\, d\Sigma.$$

La première a pour valeur

$$\mu_0 \frac{1}{r^2} 4\pi r^2 = 4\pi\mu_0,$$

car

$$\operatorname{div}\frac{n}{r} = \operatorname{div}\frac{\rho_0}{r} = \frac{1}{r}\operatorname{div}\rho_0 - \rho_0 \nabla \frac{1}{r} = \frac{2}{r^2} - \frac{1}{r^2} = \frac{1}{r^2}.$$

La seconde est nulle et l'on a donc

$$\nabla^2 u = -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial c^2}\right) = 4\pi\mu_0,$$

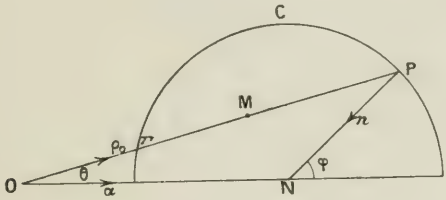
ce qui est bien la ***formule de Poisson***.

On voit que la divergence du champ des forces est une fonction discontinue (n° 152). Elle est nulle à l'extérieur du volume V (*Laplace*) et égale à $-4\pi\mu_0$ en un point intérieur à ce volume (*Poisson*). La

surface qui limite le volume V est donc une surface de discontinuité pour cette fonction.

157. Calcul de l'attraction. — Le calcul de la force d'attraction exercée par un volume V sur un point est ainsi ramené au calcul d'une

Fig. 57.



fonction $u = \int \frac{\mu\, dV}{r}$ et ce sera donc en général un problème de nature essentiellement scalaire. Dans un grand nombre de cas, on pourra cependant simplifier le problème en calculant directement l'attraction F par l'application des théorèmes généraux.

Par exemple, considérons le cas de l'attraction d'un solide de révolution sur un point de son axe que nous prenons comme origine. Soit M un point du solide et soit F_e la force élémentaire d'attraction exercée par la masse $\mu\, dV$ placée en M sur l'unité de masse placée en O. Soit r la distance OM. On a (*fig.* 57)

$$F_e = \frac{\mu\, dV}{r^2}\, \rho_0.$$

Soit α un vecteur unité dirigé suivant l'axe. Il est clair que les composantes de l'attraction normales à l'axe se détruisent deux à deux, de sorte que l'on obtient la force totale d'attraction en ajoutant les composantes suivant l'axe :

$$F = -\int F_e \cos\theta = -\int \frac{\mu\, dV}{r^2}\, \rho_0 \alpha = \mu \int_V \alpha\, \nabla\left(\frac{1}{r}\right) dV$$
$$= -\mu \int_V \alpha\, \nabla_M\left(\frac{1}{r}\right) dV,$$

la densité μ étant supposée constante.

On a alors par le théorème du gradient (n° **140**)

$$F = \mu \int \alpha\, \frac{n}{r}\, dS = \mu \int_S \frac{dS \cos\varphi}{r},$$

l'intégration s'étendant à la surface qui enveloppe le volume. Mais si nous désignons par N la longueur MP de la normale, nous avons

$$dS = 2\pi N \sin\varphi\, N\, d\varphi = 2\pi N^2 \sin\varphi\, d\varphi$$

et par suite

$$F = 2\pi\mu \int_0^\pi \frac{N^2 \sin\varphi \cos\varphi\, d\varphi}{r} = \pi\mu \int_0^\pi \frac{N^2\, d\sin^2\varphi}{r},$$

l'intégration s'étendant à la méridienne, et N et r étant supposés exprimés en fonction de la variable φ.

En particulier pour la sphère de rayon R, on a

$$F = 2\pi\mu R^2 \int_C \frac{\sin\varphi \cos\varphi\, d\varphi}{r}$$

avec

$$r = (R^2 + a^2 - 2aR\cos\varphi)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{R^2 + a^2}\,(1 - ku)^{\frac{1}{2}}$$

en posant $k = \frac{2aR}{a + R^2}$ et $\cos\varphi = u$ (a = distance de O au centre de la sphère).

La formule devient alors

$$F = -\frac{2\pi\mu R^2}{\sqrt{R^2 - a^2}} \int_C \frac{u\, du}{(1 - ku)^{\frac{1}{2}}}$$

que l'on intégrera en posant

$$1 - ku = z^2;$$

on obtient alors

$$F = \frac{4\pi\mu R^2}{k^2\sqrt{R^2 + a^2}} \int_C (1 + z^2)\, dz$$

dont l'intégration est immédiate.

En remplaçant par les limites $z = (1 - k)^{\frac{1}{2}}$ et $(1 + k)^{\frac{1}{2}}$, on trouve

$$F = \mu \frac{4}{3}\pi R^3 \frac{1}{r^2} = \frac{\mu M}{r^2}.$$

C'est-à-dire que l'attraction d'une sphère sur un point extérieur est la même que si toute la masse de la sphère était concentrée en son centre (Newton).

Exemple. — Exprimer que la fonction

$$u = f(r) = f(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2})$$

satisfait à l'équation de Laplace et intégrer l'équation obtenue.

On a

$$\nabla u = \nabla f(r) = f'(r)\nabla r = f'(r)\rho_0,$$
$$\nabla^2 u = -\operatorname{div} f'(r)\rho_0 = -f'(r)\operatorname{div}\rho_0 - \rho_0\nabla f'(r)$$
$$= -\frac{2}{r}f'(r) - f''(r).$$

On a donc l'équation

$$\frac{2}{r}f'(r) + f''(r) = 0$$

ou

$$\frac{u''}{u'} + \frac{2}{r} = 0$$

qui s'intègre et donne

$$r^2 f'(r) = C$$

et par suite

$$f(r) = \frac{A}{r} + B,$$

A et B étant des constantes.

158. **Potentiels de surface.** — Dans ce qui suit nous considérons une surface sur laquelle nous supposons répartie une certaine quantité de fluide sans épaisseur formant ainsi une simple couche sur la surface. Nous appelons *densité superficielle* en un point la limite du rapport de la quantité de fluide qui se trouve répartie sur un élément à la surface de cet élément quand cette surface tend vers zéro. Le potentiel déterminé par le fluide est appelé alors *potentiel de simple couche*.

La force d'attraction sur un point quelconque dérive d'un potentiel

$$u = \int \frac{\mu\, dS}{r}$$

et l'on a

$$F = \nabla_A u$$

exactement comme à l'article 133, car les quantités $\mu\, dV$ de fluide sont simplement remplacées ici par les quantités $\mu\, dS$. Les fonctions u et F sont finies, déterminées et continues dans tout l'espace, sauf sur la surface S, et la divergence du vecteur attraction $\nabla^2 u$ est nulle en tout point situé en dehors de la surface.

Dans le cas d'une couche sphérique on trouve, en calculant le potentiel u pour un point extérieur,

$$u = \frac{4\pi R^2 \mu}{a},$$

c'est-à-dire que tout se passe comme si la masse était concentrée au centre.

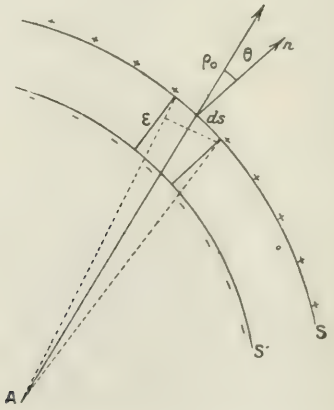
Pour un point intérieur on trouve que le potentiel est $4\pi\rho R = \text{const.}$, donc $F = \nabla u = 0$.

L'attraction sur tout point intérieur est nulle.

La démonstration de ces propriétés bien connues résulte d'une intégration scalar simple où le calcul vectoriel n'a pas à intervenir et ne présente pas d'intérêt au point de vue spécial où nous sommes placés.

159. **Potentiel de double couche.** — Nous supposons maintenant que les masses que nous considérons peuvent être positives ou négatives, ainsi que cela se présente, par exemple, en électricité. L'action de deux masses l'une sur l'autre sera attractive ou répulsive suivant que ces masses sont de même signe ou de signe contraire, car nous avons admis précédemment que deux masses *de même nature* exercent l'une sur l'autre une *attraction* réciproque. Pour tenir compte du fait expérimental qui donne un résultat contraire (deux pôles de même nom se repoussent et deux pôles de nom contraire s'attirent aussi bien en électricité qu'en magnétisme), les physiciens ont pris l'habitude, sans changer le signe du potentiel, *de changer le signe de la force*. Nous ne tiendrons pas compte à cette place de

Fig. 58.



cette convention qu'il suffit de signaler. Ceci posé, considérons deux surfaces S et S' très voisines l'une de l'autre (*fig.* 58) et supposons réparties sur chacune d'elles une couche + et une couche − respec-

tivement de densités ρ et ρ'. Supposons que dS et dS' étant deux éléments de surface découpés respectivement sur S et sur S' par les normales à S menées par les points qui limitent dS, nous ayons la relation

$$\rho\, dS = \rho'\, dS'.$$

Nous supposons que quand ε diminue indéfiniment, le produit $\rho\varepsilon$ reste constant. Dans ces conditions ρ et ρ' augmentent indéfiniment et le produit $\rho\varepsilon = \mu$ prend en chaque point une valeur que l'on appelle la *densité* μ du feuillet ou la *puissance* du feuillet en ce point, appelant *feuillet* un dispositif tel que celui que nous venons de décrire.

La surface S exerce alors sur une masse 1 unité une action dérivant d'un potentiel

$$u_1 = \int \frac{\rho\, dS}{r}$$

et la surface S' une action en sens contraire dérivant d'un potentiel

$$u_2 = \int \frac{\rho'\, dS'}{r'},$$

de sorte que le potentiel total est

$$u_1 - u_2 = \int \left(\frac{\rho\, dS}{r} - \frac{\rho'\, dS'}{r'}\right) = \int \rho\, dS \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right)$$

Mais on a

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} = \frac{d\frac{1}{r}}{dn}\, dn = \frac{d\frac{1}{r}}{dn}\, \varepsilon$$

et par suite

$$u = \int \mu \frac{d\frac{1}{r}}{dn}\, dS,$$

μ étant positif dans le cas de la figure, car la normale n va de la face négative à la face positive, et alors $\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}$ est bien $+\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right) dn$. On peut écrire aussi, en remplaçant $\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right)$ par sa valeur [n° **123**, (1)],

$$u = -\int \mu n \nabla_P \frac{1}{r}\, dS,$$

P désignant le point de la surface S.

Il n'y a pas lieu d'insister sur cette théorie du feuillet qui ne constitue qu'un artifice de calcul, car l'établissement de deux couches

telles que celles que nous avons décrites ne peut évidemment pas être une réalité physique. Cette théorie, établie au moment où celles des champs tourbillonnaires n'existait pas encore, avait pour but de ramener les calculs relatifs aux questions de leur domaine, aux méthodes connues dérivant de la théorie du potentiel de l'attraction; la théorie des feuillets représente peut-être, dit Föppl, « l'exemple le plus remarquable des beaux résultats que l'on peut obtenir à l'aide de moyens tout à fait impropres et insuffisants en eux-mêmes ». Le lecteur trouverait « dans le livre déjà cité de Föppl [1], *Geometrie der Wirbelfelder* », un exposé très simple et très lucide de la relation qui existe entre le champ créé par le feuillet et le champ tourbillonnaire dont nous avons parlé plus haut (n° 147 et suiv.). Nous ne pouvons que le renvoyer à cet Ouvrage pour cette intéressante étude que nous ne pouvons reproduire ici.

Nous nous contenterons d'établir une proposition importante due à Gauss et établie par lui au moyen de l'artifice du feuillet, mais qui découle très simplement de ce que nous avons établi précédemment. Considérons un feuillet homogène, c'est-à-dire tel que μ soit une constante sur toute la surface S. Nous aurons, d'après l'expression précédente,

$$u = -\mu \int n \nabla \frac{1}{r}\, dS$$

ou bien

$$u = \mu \int_S \frac{n\zeta_0}{r^2}\, dS,$$

mais (*fig.* 58) on a

$$dS(n\zeta_0) = -dS\cos\theta = -ds,$$

ds désignant la petite surface suivant laquelle le cône de sommet A qui s'appuie sur l'élément de S coupe une sphère de centre A ayant pour rayon r; on en déduit (au signe près)

$$u = \mu \int d\omega = \mu\Omega,$$

en désignant par $d\omega$ l'*angle solide* sous lequel on voit l'élément de S du point A, c'est-à-dire la surface découpée par le cône A sur la sphère de rayon unité ayant son centre au point A. Ω désigne alors l'angle solide sous lequel le contour du feuillet est vu du point A. Ce

[1] Art. 19 et suivants.

théorème est connu sous le nom de *intégrale de Gauss*. Le signe de l'expression se discuterait sans difficulté.

Ce résultat rend évidente une proposition importante. Supposons que le feuillet homogène soit une surface fermée S. Si le point A est intérieur à la surface, il est clair que l'ouverture totale est 4π et l'on a, au point A, $u = 4\pi\mu$. Si le point A est en dehors du feuillet, l'ouverture totale est nulle et l'on a $u = 0$. Quand le point A se déplace de l'extérieur vers l'intérieur de la surface, on voit donc que u subit une discontinuité égale à $4\pi\mu$.

Remarque. — Il n'y aucun avantage à introduire les notations vectorielles dans des calculs *purement scalaires* tels que ceux de l'importante question de *l'attraction des ellipsoïdes*. On trouvera cette dernière question traitée complètement et accompagnée de notes historiques très intéressantes dans le *Traité de Mécanique* de Marcolongo déjà cité (t. II, Chap. VI).

CHAPITRE XIV.

MOUVEMENT D'UN SOLIDE AUTOUR D'UN POINT FIXE.

160. Moments d'inertie. — On appelle *moment d'inertie polaire* d'un solide par rapport à un axe, la somme

$$(1) \qquad I = \Sigma m r^2$$

des produits des masses des points qui composent le solide par le carré de leur distance à l'axe. C'est une quantité essentiellement positive. Soient O un point de l'axe, ρ le vecteur d'un point du solide par rapport à l'origine O, α un vecteur unité dirigé suivant l'axe. On a

$$r = \mathrm{TV}\alpha\rho.$$

D'où

$$(2) \qquad I = -\Sigma m \mathrm{V}^2 \alpha\rho.$$

Posons

$$(3) \qquad \varphi\alpha = \Sigma m \mathrm{V}\rho\mathrm{V}\rho\alpha = \Sigma m\rho\mathrm{V}\rho\alpha \text{ (1)},$$

car

$$\mathrm{S}m\rho\mathrm{V}\rho\alpha = 0.$$

Nous aurons

$$(4) \qquad I = \mathrm{S}\alpha\varphi\alpha.$$

Si alors nous posons

$$(5) \qquad \varpi = \frac{\alpha}{\sqrt{I}},$$

cette équation devient

$$(6) \qquad \mathrm{S}\varpi\varphi\varpi = 1,$$

équation d'un ellipsoïde (n° 111), car il est clair que φ est une fonction

(1) C'est une fonction linéaire de α bien qu'elle ne soit pas sous la forme ordinaire $\Sigma\lambda\mathrm{S}\mu\alpha$, car elle s'écrit $\varphi\alpha = \Sigma m(\rho^2\alpha - \rho\mathrm{S}\rho\alpha)$.

autoconjuguée et que ϖ ne peut devenir infini. Les rayons vecteurs de cet ellipsoïde donnent la valeur de l'inverse de la racine carrée des moments d'inertie par rapport aux droites qui passent par son centre. On l'appelle *ellipsoïde d'inertie* relatif au point O (Cauchy, 1827).

Étant donnée la direction du rayon vecteur de l'ellipsoïde ϖ, on sait d'ailleurs que la direction $\varphi\varpi$ est celle du vecteur mené par le centre perpendiculairement au plan tangent en ϖ et que la distance du plan tangent au centre ou vecteur de proximité est $(\varphi\varpi)^{-1}$ (n° 112).

L'ellipsoïde d'inertie ayant trois axes (ou plus s'il est de révolution ou s'il se réduit à une sphère), on appelle ces axes, *axes principaux d'inertie* relatifs au point O. L'ellipsoïde d'inertie relatif au centre de gravité s'appelle *ellipsoïde central*. Quand on connaît ce dernier ellipsoïde, on peut calculer le moment d'inertie du solide par rapport à une droite quelconque au moyen du théorème suivant dit *théorème de* Steiner.

Le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe quelconque est égal au moment d'inertie par rapport à un axe qui lui est parallèle et mené par le centre de gravité, augmenté du produit de la masse totale du système par le carré de la distance des deux axes.

La démonstration est immédiate. Soit l'axe Δ et Δ_G la parallèle menée par le centre de gravité. En désignant par δ la distance (vectorielle) de Δ_G à Δ, par ρ et ρ' les distances de Δ et Δ_G à un même point P, on a

$$\rho' = \delta + \rho \qquad \text{ou} \qquad \rho = \rho' - \delta.$$

D'où

$$\Sigma m \rho^2 = \Sigma m \rho'^2 - \delta \Sigma m \rho' + \Sigma m \delta^2,$$

ce qui démontre la proposition, car

$$\Sigma m \delta^2 = \delta^2 \Sigma m = M \delta^2$$

et d'autre part, pour un axe passant par le centre de gravité, on a

$$\Sigma m \rho' = 0.$$

L'ellipsoïde *central* d'inertie se distingue par la propriété suivante : c'est que *ses axes sont axes principaux d'inertie pour tous leurs points*. Il n'en est pas de même pour un axe principal d'inertie de l'ellipsoïde d'inertie relatif à un autre point. Dans ce dernier cas l'axe n'est principal *que pour le point considéré* et ne l'est pour aucun autre point de la droite. Il en résulte que si une droite est

axe principal d'inertie par rapport à *deux de ses points*, cette droite est un axe de l'ellipsoïde central d'inertie.

On peut démontrer cette proposition comme il suit. Soient O un point et i, j, k les directions principales en ce point. Nous savons que ces directions satisfont à l'équation

$$\varphi\sigma = \zeta\sigma \quad \text{ou} \quad V\tau\varphi\sigma = 0.$$

On a donc

$$V i\varphi i = 0$$

ou bien

$$V i(\Sigma m\rho V i\rho) = 0.$$

Cette équation peut s'écrire

$$V i\Sigma m\rho S i\rho = 0$$

en développant le vecteur double.

Supposons alors qu'un autre point zi de l'axe soit tel que l'axe i soit aussi axe principal pour ce point. On aura, ρ' étant le vecteur d'un point quelconque par rapport à ce point de l'axe,

$$0 = V i\Sigma m\rho' S i\rho' = V i\Sigma m(\rho - zi) S i(\rho - zi)$$

ou bien, en développant le produit et tenant compte de l'équation précédente,

$$zi V m\rho = 0,$$

c'est-à-dire $z = 0$, ou bien $V m\rho$. Dans le premier cas le second point se confond avec le premier. Dans le second, l'égalité a lieu quel que soit z, c'est-à-dire pour tout point de la droite, et $V m\rho = 0$ indique que O est le centre de gravité.

161. Mouvement autour d'un point fixe. — Considérons un solide tournant autour d'un point fixe que nous prenons comme origine et appliquons-lui le théorème de D'ALEMBERT, qui donne

$$S\Sigma(m\rho'' - \sigma)\delta\rho = 0.$$

m étant la masse d'un point du solide, ρ'' son accélération, σ la force qui lui est appliquée et $\delta\rho$ un déplacement virtuel compatible avec les liaisons.

Les déplacements compatibles avec les liaisons sont ici des rotations autour d'axes passant par le point O et l'on a donc

$$\delta\rho = V\delta\omega.\rho,$$

$\delta\omega$ représentant un vecteur infiniment petit arbitraire. On a donc l'équation (en annulant le coefficient de $\delta\omega$)

$$(1) \qquad \Sigma V(m\rho'' - \sigma)\rho = 0$$

qu'on aurait pu écrire immédiatement, car elle exprime que la somme des moments des forces appliquées et des forces d'inertie par rapport au point fixe est nulle.

On a, ω étant maintenant l'axe *réel* de la rotation,

$$(a) \qquad \rho' = V\omega\rho,$$
$$\rho'' = V\omega\rho' + V\omega'\rho = V\omega V\omega\rho + V\omega'\rho.$$

Remplaçons ρ'' par sa valeur dans l'équation (1). Nous trouvons sans difficulté l'équation du mouvement

$$(2) \qquad \Sigma m\rho V\rho\omega' = \Sigma m(V\omega\rho S\omega\rho - V\rho\sigma),$$

et en désignant par μ le moment des forces directement appliquées, par rapport au point fixe,

$$(3) \qquad \Sigma m\rho V\rho\omega' - \Sigma m V\omega\rho S\omega\rho + \mu = 0.$$

En transformant cette équation en cartésien, nous devons penser que nous obtiendrons les équations classiques d'Euler. Et, en effet, posons

$$\rho = ix + jy + kz,$$
$$\omega = pi + qj + rk,$$

x, y, z étant respectivement les coordonnées d'un point du corps, et p, q, r les composantes de l'axe de rotation par rapport à des axes fixés dans le corps et par conséquent *mobiles avec lui autour du point* O.

Posons également

$$p' = \frac{dp}{dt}, \qquad q' = \frac{dq}{dt}, \qquad r' = \frac{dr}{dt},$$

et désignons par L, M, N les moments résultants des forces appliquées par rapport aux axes mobiles. L'équation précédente s'écrit

$$\Sigma m(ix + jy + kz)\begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ p' & q' & r' \end{vmatrix}$$
$$+ \Sigma m\begin{vmatrix} i & j & k \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}(px + qy + rz) - \mathrm{L}i + \mathrm{M}j + \mathrm{N}k = 0.$$

Égalons à zéro les coefficients de i, j, k et supposons que les axes i, j, k sont les axes principaux d'inertie du corps relatifs au point P, de sorte que les doubles produits des coordonnées disparaissent, nous obtenons les *équations d'Euler*

$$A\frac{dp}{dt} - (C - B)qr = L,$$

$$B\frac{dq}{dt} + (A - C)rp = M,$$

$$C\frac{dr}{dt} + (B - A)pq = N.$$

Ce dernier calcul n'avait d'ailleurs pour but que de montrer qu'il était aisé d'obtenir les équations d'Euler au moyen de l'équation (3). Mais nous ne les utiliserons pas dans ce qui suit.

162. Cas où les forces extérieures admettent une résultante unique passant par le point fixe. — Supposons que les forces extérieures admettent une résultante unique passant par le point fixe. On a alors

$$\Sigma V\rho\sigma = 0,$$

et l'équation (1) du numéro précédent se réduit à

$$\Sigma m V\rho\rho'' = 0 \tag{1}$$

ou bien

$$\frac{d}{dt}\Sigma m V\rho\rho' = 0.$$

On peut donc écrire

$$\Sigma m V\rho\rho' = \gamma = \text{un vecteur constant}, \tag{2}$$

équation qui exprime que le moment résultant des quantités de mouvement par rapport au point fixe $\Sigma V\rho m\frac{d\rho}{dt}$ reste constant.

Opérons sur (1) par $S\omega$ il vient, en tenant compte de l'équation

$$\rho' = V\omega\rho,$$

$$\Sigma m\rho'\rho'' = 0,$$

ou bien par intégration

$$\Sigma m\rho'^2 = -h^2, \tag{3}$$

ce qui donne l'*intégrale des forces vives*, h étant une constante.

Posons

$$\varphi\omega = \Sigma m\rho V\rho\omega, \tag{4}$$

φ étant une fonction linéaire auto-conjuguée (n° 160, note). Les équations précédentes deviennent

$$(5) \qquad \varphi\omega + \gamma = 0,$$

$$(6) \qquad S\omega\varphi\omega = h^2.$$

et l'équation (3) du numéro précédent devient

$$(7) \qquad \varphi\omega' + V\omega\varphi\omega = 0;$$

on a, d'ailleurs, les relations

$$(8) \qquad \varphi\omega' = V\omega\gamma,$$

$$(9) \qquad S\omega\gamma - h^2 = 0.$$

Ces équations très simples peuvent s'interpréter géométriquement.

D'après (2), γ est la somme des vitesses aréolaires des points du solide multipliées chacune par la masse de l'élément et représentées chacune par un vecteur $\rho\rho'$ perpendiculaire au plan de cette aire décrite dans le temps dt.

D'après (3), h^2 est la force vive totale du corps Σmv^2, v étant la vitesse linéaire du point considéré.

D'après (6), ω regardé comme un vecteur variable représente un ellipsoïde fixe dans le corps (puisque ω est rapporté à des axes fixes dans le corps), mais mobile avec lui.

L'équation (9) est un plan tangent à cette surface. Il est fixe dans l'espace, car γ et h^2 sont constants. Le demi-diamètre qui aboutit au point de contact ω représente l'axe instantané de rotation.

Le déplacement du solide peut donc être représenté (*Poinsot*) par le roulement de l'ellipsoïde (6) sur le plan fixe (9). On remarquera qu'il n'a été fait aucun usage des moments ou axes d'inertie dans cette élégante solution qui est due à *Hamilton* (E., 417 et suiv.).

On peut d'ailleurs facilement introduire l'ellipsoïde d'inertie, car la force vive est

$$2T = \Sigma mv^2 = S\omega\varphi\omega = h^2$$

et le moment d'inertie par rapport à ω est d'après le n° 160

$$I_\omega = \Sigma m T^2 V\omega_0\rho = \frac{h^2}{T^2\omega},$$

d'où

$$T\omega = \frac{h}{\sqrt{I_\omega}}.$$

L'ellipsoïde des forces vives ou de Poinsot est donc homothétique à l'ellipsoïde d'inertie, le rapport d'homothétie étant h (n° 113).

Nous pouvons également obtenir la seconde représentation de Poinsot au moyen du roulement de deux cônes l'un sur l'autre. En effet, l'équation (2) peut s'écrire

$$\Sigma m V \rho V \omega \rho = \gamma.$$

Si nous élevons les deux membres au carré et que nous les multiplions *avec* ceux de l'équation (3)

$$\Sigma m V^2 \omega \rho = -h^2,$$

nous obtenons

$$\gamma^2 \Sigma m V^2 \omega \rho + h^2 (\Sigma m V \rho V \omega \rho)^2 = 0,$$

équation scalaire du second degré en ω indépendante du module de ω. Elle représente donc un cône du second ordre ayant son centre à l'origine. Ce cône est fixe dans le corps et mobile avec lui d'après ce qui a été dit plus haut.

En tenant compte de (4), cette équation devient

$$0 = \gamma^2 S \omega \varphi \omega - h^2 (\varphi \omega)^2 = S n \omega,$$

en posant

$$n = \gamma^2 \varphi \omega - h^2 \varphi^2 \omega :$$

n est la normale au cône le long de la génératrice.

D'autre part, nous avons par (7)

$$S \omega \varphi \omega' = 0$$

ou

$$S \omega' \varphi \omega = 0.$$

Donc ω' est perpendiculaire à $\varphi\omega$. On a aussi (8)

$$\varphi^2 \omega' = \varphi V \omega \gamma.$$

D'où

$$S \omega \varphi^2 \omega' = S \omega \varphi V \omega \gamma = S V \omega \gamma . \varphi \omega = - S V \omega \gamma . \gamma = 0.$$

Donc

$$S \omega' \varphi^2 \omega = 0$$

et ω' perpendiculaire à $\varphi^2 \omega$.

Il en résulte que ω' est perpendiculaire à n et que par conséquent le cône entraîné par les axes mobiles est touché par le cône fixe qui est le lieu dans l'espace des axes instantanés.

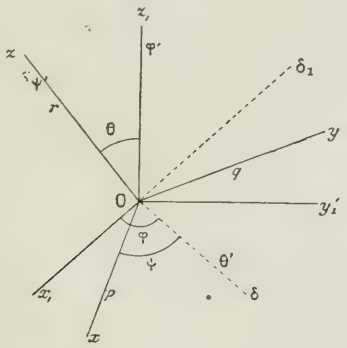
163. Mouvement de la toupie. — Une toupie est un solide de révolution qui peut tourner autour d'un point de son axe. L'étude de son mouvement se fait le plus commodément au moyen des variables d'Euler.

On suppose trois axes fixes $Ox_1y_1z_1$ et trois axes mobiles $Oxyz$ entraînés dans le mouvement de la toupie et ayant leur origine commune en son point de suspension. Désignant par φ, ψ, θ les angles d'Euler et p, q, r les composantes de l'axe instantané suivant les axes *mobiles*, on obtiendra les expressions de p, q, r en fonction de φ, ψ, θ, en écrivant que les deux systèmes de rotations instantanées

$$\begin{array}{llll} p, \quad q, \quad r & \text{autour de} & Ox, \quad Oy, \quad Oz, \\ \varphi', \quad \theta', \quad \psi' & \text{autour de} & Oz_1, \quad \delta, \quad Oz \end{array}$$

sont équivalents, c'est-à-dire que l'axe résultant est le même.

Fig. 59.



On aura, en désignant provisoirement par δ_1, un axe unité perpendiculaire à δ dans le plan xOy

$$pi + qj + rk = \theta'\delta + k\psi' + (k\cos\theta + \delta_1\sin\theta)\varphi'.$$

Remplaçons δ et δ_1 par leurs valeurs

$$\delta = i\cos\psi + j\sin\psi,$$
$$\delta_1 = j\cos\psi - i\sin\psi,$$

et égalons les coefficients de i, j, k, nous avons

$$p = \theta'\cos\psi - \varphi'\sin\theta\sin\psi,$$
$$q = \theta'\sin\psi + \varphi'\sin\theta\cos\psi,$$
$$r = \psi' + \varphi'\cos\theta.$$

La force vive T a pour valeur (n° 162)

$$T = \frac{1}{2}S\omega\varphi\omega = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2).$$

La toupie étant de révolution, on a $A = B$. D'où

$$T = \frac{1}{2} A(p^2 + q^2) + \frac{1}{2} C r^2$$
$$= \frac{1}{2} A(\varphi'^2 \sin^2\theta + \theta'^2) + \frac{1}{2} C r^2.$$

D'autre part, la seule force extérieure à laquelle la toupie est soumise étant la gravité dont le travail élémentaire est $Mga \sin\theta\, d\theta$ (a étant la distance du centre de gravité au point de suspension), on a

$$dT = Mga \sin\theta\, d\theta$$

ou

$$T = \text{const.} - Mga\cos\theta = C_1 - D\cos\theta.$$

Si nous supposons que le mouvement de rotation autour de l'axe est très rapide, c'est-à-dire $\frac{dr}{dt}$ grand vis-à-vis de p et q, et qu'on peut négliger le produit pq vis-à-vis de $\frac{dr}{dt}$, on a par Euler (n° 161)

$$C\frac{dr}{dt} = 0.$$

D'où

$$r = \text{const.} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2} C r^2 = C_3.$$

D'où l'équation

$$(\alpha) \qquad \varphi'^2 \sin^2\theta + \theta'^2 = C_2 - \frac{2D}{A}\cos\theta.$$

Remarquons maintenant que le moment des forces extérieures par rapport à un axe vertical est nul et que par suite le moment résultant des quantités de mouvement par rapport à cet axe est nul. Or l'équation de cet axe passant par le point O est, par rapport aux axes mobiles,

$$K\cos\theta + \delta_1 \sin\theta = (-i\sin\psi + j\cos\psi)\sin\theta + k\cos\theta = \varpi.$$

Le moment des quantités de mouvement par rapport à cet axe est

$$S\varpi\Sigma m\rho V\omega\rho = S\varpi\Sigma(Api + Bqj + Crk)$$
$$= S(-i\sin\psi\sin\theta + \ldots)(Api + \ldots)$$
$$= Ap\sin\psi\sin\theta - Bq\sin\theta\cos\psi - Cr\cos\theta,$$

ou bien en remplaçant p et q par leurs valeurs

$$(\beta) \qquad A\varphi'\sin^2\theta + Cr\cos\theta = C'_2.$$

Soit θ_0 l'angle initial d'inclinaison de l'axe et soit à l'origine

$$\theta'_0 = \psi'_0 = 0,$$

on aura, par (α) et (β),

$$C_2 = \frac{2D}{A}\cos\theta_0, \qquad C'_2 = Cr\cos\theta_0.$$

D'où les équations

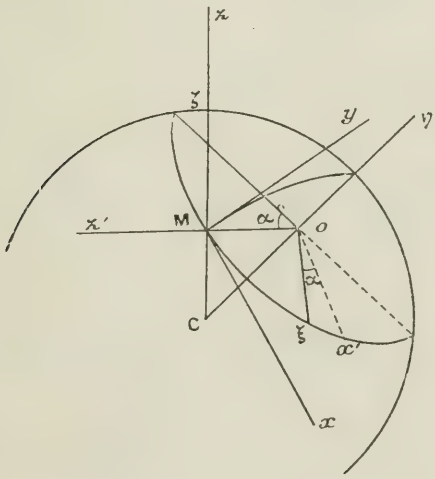
$$\psi'^2 \sin^2\theta + \theta'^2 = \frac{2D}{A}(\cos\theta_0 - \cos\theta),$$

$$\psi' \sin^2\theta = \frac{Cr}{A}(\cos\theta_0 - \cos\theta),$$

équations discutées dans tous les Traités de Mécanique et que nous ne discuterons pas ici. Nous présentons d'ailleurs cette question un peu plus loin sous une forme différente et, avant d'y arriver, nous établirons en passant les équations classiques du mouvement d'un point à la surface de la Terre, à titre d'exercice sur les *changements de coordonnées*.

164. Mouvement d'un point à la surface de la Terre. Soit (*fig.* 60) M un point à la surface de la Terre, défini par la latitude λ et l'angle α

Fig. 60.



de son méridien avec un méridien fixe. Soient $O\xi\eta\zeta$ trois axes fixes dont l'origine est sur l'axe de la Terre. Il s'agit de rapporter un point à trois nouveaux axes mobiles de centre M dirigés, l'un Mz suivant la

verticale du point M, et les deux autres Mx et My dirigés l'un vers l'Est, l'autre vers le Nord.

Soit i, j, k le système $O\xi\eta\zeta$. Prenons des axes intermédiaires $Ox'\eta_1$M. Nous aurons en les désignant par $Oi'j'k'$

$$\begin{aligned} i' &= j^\alpha i = i\cos\alpha - k\sin\alpha, \\ j' &= j, \\ k' &= j^\alpha k = k\cos\alpha + i\sin\alpha. \end{aligned}$$

Transportons ces axes, parallèlement à eux-mêmes, en M et faisons-les tourner autour de Ox parallèle à Ox' de l'angle λ égal à la latitude comptée ici négativement à cause du sens de l'axe Ox. On a d'abord par rotation des axes autour de Ox

$$\begin{aligned} i_1 &= i' = i\cos\alpha - k\sin\alpha, \\ j_1 &= (\cos\lambda - i'\sin\lambda)j = -i\sin\lambda\sin\alpha + j\cos\lambda - k\sin\lambda\cos\alpha, \\ k_1 &= (\cos\lambda - i'\sin\lambda)k' = \quad i\sin\alpha\cos\lambda + j\sin\lambda + k\cos\lambda\cos\alpha. \end{aligned}$$

Soit OM $= p$, on a alors

$$\mathrm{OM} = p(k\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

De sorte que finalement, en appelant x, y, z les coordonnées par rapport au nouveau système, on a

$$\xi i + \eta j + \zeta k = \mathrm{OM} + (xi_1 + yj_1 + zk_1)$$

ou

$$\begin{aligned} \xi &= x\cos\alpha + (p + z\cos\lambda - y\sin\lambda)\sin\alpha, \\ \eta &= y\cos\lambda + z\sin\lambda, \\ \zeta &= (p + z\cos\lambda - y\sin\lambda)\cos\alpha - x\sin\alpha. \end{aligned}$$

Ce sont les formules cherchées de transformation des coordonnées. Il suffit alors de former les équations de Lagrange pour avoir les équations connues du mouvement d'un point. On a, en supposant que la masse du point est l'unité,

$$v^2 = \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2.$$

Or, on a

$$\alpha = \omega t, \qquad \frac{d\alpha}{dt} = \omega,$$

et en négligeant le carré de ω qui est très petit, et écrivant les équations de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{dL}{dx'} - \frac{dL}{dx} = X$$

où

$$x' = \frac{dx}{dt},$$

on obtient les équations connues $\left(L = \frac{1}{2} v^2 \text{ et } \frac{d\omega}{dt} = 0\right)$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\omega\left(\frac{dz}{dt}\cos\lambda - \frac{dy}{dt}\sin\lambda\right) = X,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\omega\frac{dx}{dt}\sin\lambda = Y,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} - 2\omega\frac{dx}{dt}\cos\lambda = Z.$$

Pour leur discussion cf. *Traités de Mécanique*.

165. Mouvement d'un solide. — On peut présenter au moyen des propriétés les plus élémentaires du vecteur, les éléments de la Géométrie du mouvement d'un solide en introduisant simplement, au lieu des mouvements absolus, ainsi que nous l'avons fait, les vitesses et les accélérations *relatives* des points l'un par rapport à l'autre. Nous allons donner rapidement quelques-uns des traits essentiels de cette méthode qui donne des résultats particulièrement simples. La question a été traitée d'une manière étendue par Jaumann [1]. Nous considérerons seulement le cas du mouvement d'un solide autour d'un point fixe.

Nous ferons d'abord une remarque que nous utiliserons un peu plus loin. Si nous avons le vecteur

$$\sigma = \alpha \times \beta,$$

σ est perpendiculaire à α et β, et nous pouvons tirer de là, par *division*,

$$\alpha = \frac{\sigma \times \eta}{\beta\eta} = \frac{V\sigma\eta}{S\beta\eta},$$

où η est un *vecteur quelconque*. En effet, si nous remplaçons α par cette valeur dans l'expression de σ nous obtenons

$$\sigma = \frac{\sigma \times \eta}{\beta\eta} \times \beta = \frac{\sigma(\eta\beta) - \eta(\sigma\beta)}{\beta\eta} = \sigma,$$

puisque $\sigma\beta = 0$.

---

[1] G. JAUMANN, *Die Grundlagen der Bewegungslehre*. Leipzig, 1905, p. 155 et suivantes.

Ceci posé, désignons par ρ_i un vecteur allant d'un point à un autre du solide. Si celui-ci se déplace, ρ_i change de valeur vectorielle. Nous dirons que le corps est *solide* lorsque le produit scalaire de deux vecteurs *quelconques* reste constant ou

$$\rho_1 \rho_2 = \text{const.}$$

On en tire, en différentiant par rapport au temps et désignant par ε la vitesse *relative* des deux extrémités d'un vecteur,

$$\varepsilon_1 \rho_2 + \rho_1 \varepsilon_2 = 0; \tag{1}$$

Si les droites coïncident, on a

$$\rho^2 = \text{const.},$$

c'est-à-dire que la longueur d'un segment qui joint deux points donnés reste constante. Par différentiation, on a

$$\varepsilon \rho = 0. \tag{2}$$

La vitesse relative des extrémités d'un vecteur d'un solide qui se déplace est donc perpendiculaire à ce vecteur.

Si deux droites ρ et ρ' sont parallèles, on a

$$\rho = m \rho',$$

où m est un scalar indépendant du temps. D'où

$$\varepsilon = m \varepsilon'.$$

Deux droites parallèles restent parallèles.

Supposons qu'il existe dans le solide *deux* droites dont les extrémités n'ont pas de vitesse *relative*. Soient ρ_m, ρ_n ces deux droites. On a

$$\varepsilon_m = \varepsilon_n = 0.$$

Soit alors ρ_i une droite quelconque du milieu. On a par (1)

$$\varepsilon_i \rho_m + \rho_i \varepsilon_m = 0,$$

d'où

$$\varepsilon_i \rho_m = 0.$$

et de même

$$\varepsilon_i \rho_n = 0.$$

Mais on a aussi

$$\varepsilon_i \rho_i = 0.$$

Donc ε_i doit être perpendiculaire à trois droites qui ne sont pas

coplanaires et, par suite, $\varepsilon_i = 0$. Il suit de là que *tous les points du milieu ont même vitesse*. Un mouvement de ce genre est dit *mouvement de translation*.

Supposons maintenant qu'il y ait dans le solide *une seule* droite dont les extrémités n'ont pas de vitesse relative. Soit ρ_u cette droite. On a

$$\varepsilon_u = 0.$$

D'après (1) on a alors pour une droite quelconque ρ_i du solide

$$\varepsilon_i \rho_u = 0.$$

Les vitesses relatives sont donc toutes perpendiculaires à ρ_u, c'est-à-dire *parallèles à un même plan*. Comme la vitesse relative est aussi perpendiculaire à ρ_i, on peut poser pour un vecteur ρ_1 quelconque

$$\varepsilon_1 = \omega_1 \times \rho_1,$$

où ω_1 est un vecteur inconnu. D'où, par division (*cf.* plus haut),

$$\omega_1 = \frac{\varepsilon_1 \times \alpha}{\rho_1 \alpha},$$

α étant un vecteur quelconque arbitraire. Si nous introduisons dans cette expression une droite *quelconque* ρ_i du milieu, ω_1 prend une valeur tout à fait déterminée

$$\omega = \frac{\varepsilon_1 \times \varepsilon_i}{\rho_1 \varepsilon_i}, \tag{3}$$

et cette valeur de ω est en effet indépendante de ε_i puisque toutes les vitesses ε sont parallèles à un même plan.

Ce vecteur ω s'appelle la *vitesse de rotation* du milieu. A cause de (1) on peut échanger les indices et écrire

$$\omega = \frac{\varepsilon_i \times \varepsilon_1}{\varepsilon_i \rho_1},$$

d'où il suit

$$\varepsilon_i = \omega \times \rho_i, \tag{4}$$

car on a

$$\omega \times \rho_i = -\frac{1}{\rho_i \varepsilon_1} V(\varepsilon_1 \times \varepsilon_i) \times \rho_i = -\frac{1}{\rho_i \varepsilon_1} [\varepsilon_1(\varepsilon_i \rho_i) - \varepsilon_i(\varepsilon_1 \rho_i)] = \varepsilon_i.$$

Relation générale entre des droites quelconques et leurs vitesses relatives. Et ceci donne bien la forme la plus générale du mouvement

du solide, car pour déterminer ω il suffit de connaître une droite du milieu ρ_1, et la vitesse relative de ses extrémités ainsi que la *direction* (car le module de ε_i disparaît dans l'expression de ω) de la vitesse relative d'une autre droite, éléments qu'on pourra toujours trouver dans un mouvement quelconque. ω étant alors connu, la vitesse relative d'une droite quelconque sera déterminée par (4).

On voit que cette manière de procéder se rapproche beaucoup des considérations géométriques les plus générales sur le mouvement d'un solide. On peut mettre le résultat sous la forme habituelle, car si nous désignons maintenant par ρ le vecteur d'un point par rapport à une origine en repos absolu et par ε_0 et ρ_0 la vitesse et le vecteur d'un point particulier du corps, l'équation (4) prend la forme

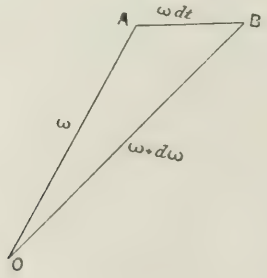
$$\varepsilon = \varepsilon_0 - V\omega(\rho - \rho_0),$$

ce qui est l'expression du théorème fondamental : *le déplacement infinitésimal d'un solide est la résultante d'une translation égale à celle d'un point quelconque du solide précédée ou suivie d'une rotation autour d'un axe passant par ce point.*

La direction et la grandeur de cet axe de rotation sont indépendantes du point particulier du solide que l'on considère.

Les mouvements de *précession* et de *nutation* s'expliquent tout aussi simplement par la représentation géométrique en supposant qu'il s'agisse d'un corps solide assujetti à tourner autour d'un de ses points invariablement fixé. Soit O le point fixe et ω la vitesse angu-

Fig. 61.



laire à un instant donné. La dérivée totale de ω par rapport au temps est

$$\omega' = \frac{d\omega}{dt},$$

et elle représente l'*accélération angulaire*.

C'est un vecteur dont la direction donne celle de la variation de la vitesse angulaire. La vitesse angulaire a une direction constante si l'accélération a la direction de la vitesse angulaire et alors le corps tourne autour d'un axe fixe. Supposons au contraire, comme exemple simple, que ω' soit constamment perpendiculaire à ω et à un vecteur fixe γ. De ce que ω' est perpendiculaire à ω, il résulte

$$\omega\omega' = 0 \qquad \text{ou} \qquad \omega'^2 = \text{const.};$$

par suite, le module de la vitesse angulaire est constant et le corps tourne autour de l'axe de rotation avec une vitesse constante.

De ce que ω' est perpendiculaire à γ, vecteur fixe dans l'espace, il résulte

$$\omega'\gamma = 0,$$

et en intégrant

$$\omega\gamma = \text{const.}$$

Or, le module de ω étant constant, il en résulte que l'angle de ω et de γ est constant.

Donc *l'axe de rotation décrit un cône circulaire* autour de γ. C'est le mouvement dit *mouvement de précession*. Ce mouvement peut être uniforme ou varié suivant les cas, mais il ne change jamais de sens, ainsi que le montre la discussion analytique bien connue, dans le cas où r est très grand par rapport à p et q. Supposons, par exemple, pour simplifier, que le mouvement de précession soit uniforme. Si nous désignons par v le module de ω, le cercle décrit par l'extrémité de ω a pour longueur $2\pi v \sin\varphi$ où φ est le demi-angle au sommet du cône de précession.

Si nous appelons T la durée de la révolution, la vitesse de cette extrémité est $\frac{2\pi v \sin\varphi}{T}$ et l'accélération de rotation est

$$\omega' = \frac{2\pi}{T} k \times \omega,$$

où k est un vecteur unité dirigé suivant l'axe du cône de précession.

Si nous considérons un cône de même sommet que le cône fixe, et dont nous supposons très petite l'ouverture φ_1, pour simplifier, ce cône, supposé entraîné avec le corps, roulera sans glisser sur le cône fixe si nous avons la relation (où R est le rayon de base de ce petit cône)

$$\frac{2\pi v \sin\varphi}{T}\, dt = 2\mathrm{R} v\, dt$$

ou bien

$$\varrho_1 = \frac{2\pi \sin\varphi}{cT},$$

puisque

$$R = c\frac{\varrho_1}{2}.$$

Le petit *cône* sera alors le lieu, dans le corps, des droites qui viennent successivement coïncider avec les axes de rotation. C'est la représentation de *Poinsot* dans un cas particulier.

166. Lieu des axes de rotation. — Quand un corps tourne autour d'un point fixe, ainsi que nous venons de le considérer, on peut l'amener d'une position à une autre au moyen d'un opérateur quaternionien de la forme

$$q(\quad)q^{-1}$$

et si ρ désigne le vecteur d'un point du corps et σ sa position après la rotation, on a

$$\sigma = q\rho q^{-1}.$$

L'équation d'Hamilton [**162** (2)] s'écrit alors

$$\Sigma m V\sigma\sigma' = \gamma,$$

ou

$$\Sigma m\sigma V\omega\sigma = \gamma,$$

ou

$$\Sigma m q\rho q^{-1} - V\omega q\rho q^{-1} = \gamma.$$

Si nous développons $\sigma V\omega\sigma$, il vient

$$\Sigma m q(\rho S\rho q^{-1}\omega q - q^{-1}\omega q\rho^2)q^{-1} = \gamma.$$

Posons

$$\Phi\varpi = \Sigma m(\rho S\alpha\varpi - \rho^2\varpi),$$

Φ est une fonction autoconjuguée et l'on a

$$q\Phi(q^{-1}\omega q)q^{-1} = \gamma$$

ou

$$\Phi(q^{-1}\omega q) = q^{-1}\gamma q.$$

Si alors nous posons

$$q^{-1}\omega q = \eta, \qquad q^{-1}\gamma q = \zeta,$$

l'équation d'Hamilton prend la forme très simple

$$\Phi\eta = \zeta,$$

On voit facilement ce que représentent les nouveaux vecteurs η et ζ, car on a

$$\omega = q\eta q^{-1}, \qquad \gamma = q\zeta q^{-1},$$

ce qui montre que η est le vecteur dans la position initiale du corps qui au temps t devient l'axe instantané de rotation.

S'il n'y a pas de forces agissantes γ est constant et ζ est la position du vecteur qui au temps t devient perpendiculaire au plan invariable (*voir*, à ce sujet, TAIT, *Traité élémentaire des quaternions*, n° 383).

CHAPITRE XV.

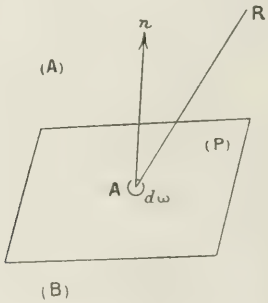
NOTIONS SUR LA THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ.

167. **Définitions** [1]. — Nous considérons dans ce qui suit un système de points matériels très rapprochés et soumis à des forces d'attraction ou autres intérieures qui s'exercent d'un point sur un autre. Soit A un point intérieur à ce système, et imaginons que nous menions par le point A un plan quelconque qui divise le milieu en deux parties (A) et (B) (*fig.* 62).

Considérons dans le plan P un petit élément de surface $d\omega$ autour du point A, et considérons toutes les actions des points de (B) sur ceux de (A) dont la direction traverse $d\omega$. Si nous composons ces actions comme si (B) était un solide invariable, nous admettrons qu'elles ont une résultante unique R appliquée au centre de gravité de $d\omega$.

Cette résultante R s'appelle *tension élémentaire au point* A sur la face de l'élément contiguë à (A).

Fig. 62.



Si la tension est dirigée vers (B) on l'appelle *pression*. Si elle est

[1] *Cf.* Détails complémentaires dans SARRAU, *Notion sur la théorie de l'élasticité* (Gauthier-Villars, 1889). — BOUASSE, *Mécanique physique* (Delagrave). — MARCOLONGO, *Mécanique rationnelle* (Milan, 1905).

dans le plan (P) on dit que la tension est *tangentielle*. Le vecteur

$$\frac{R}{d\omega} = \varepsilon,$$

qui est la limite du rapport $\frac{R}{d\omega}$ quand $d\omega$ tend vers zéro, s'appelle *la tension au point* A sur l'élément dont la normale est n. Cette tension est une fonction de la position du point A, de la direction du plan, et elle peut être aussi fonction du temps. Nous indiquerons en indice la normale au plan considéré, de sorte que si ϖ est une tension, ϖ_n indiquerait une tension sur un plan dont la normale est n.

168. Hypothèses admises. Nous admettons les hypothèses suivantes :

I. La tension élémentaire en un point est une fonction continue et différentiable du point d'application. Elle est de plus univoque.

II. Les tensions intérieures suivent le principe de l'action et de la réaction, c'est-à-dire que si ε est la tension au point A lorsque l'on considère les actions de (B) sur (A), la tension en ce même temps est $-\varepsilon$, c'est-à-dire égale et de sens opposé, lorsque l'on considère les actions de (A) sur (B).

III. Si l'on fait dans le corps une section (plane ou autre) et qu'on enlève l'une des portions du corps, limitée par cette section, l'équilibre sera rétabli en appliquant aux différents points de la section des forces égales aux tensions élémentaires en ces points.

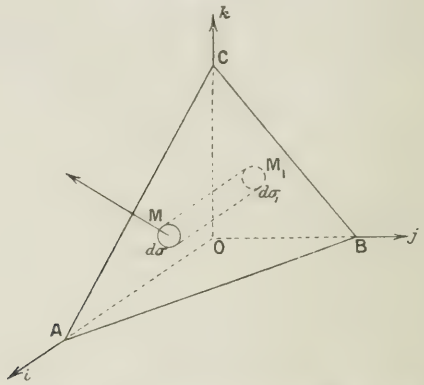
169. Théorème fondamental de Cauchy. — Ceci posé, nous allons démontrer qu'en admettant les hypothèses précédentes, *la tension en un point est une fonction autoconjuguée de la normale unité n* au plan de l'élément pour laquelle elle est considérée (ou, en d'autres termes, un tenseur) (d'après Marcolongo).

Nous allons pour cela exprimer les conditions d'équilibre d'un tétraèdre infiniment petit découpé dans le milieu considéré.

Nous supposons que ce milieu soumis à l'action de certaines forces intérieures et de forces superficielles a atteint un état d'équilibre. Nous admettons que cet équilibre ne sera pas troublé si nous rendons le corps rigide. Soit alors O un point intérieur au corps que nous prenons comme origine d'un système d'axes i, j, k rectangulaires. Coupons ces axes par un plan ABC tel que le tétraèdre OABC soit tout entier intérieur au milieu (ABC pouvant d'ailleurs être une por-

tion de sa surface), et soit n la normale unité au plan ABC *intérieure* au tétraèdre. Soit M un point quelconque du plan ABC appartenant à un élément $d\sigma$, et M_1, M_2, M_3 les projections du point M sur les plans BOC, COA, AOB et $d\sigma_1$, $d\sigma_2$, $d\sigma_3$ celles de $d\sigma$ sur ces mêmes

Fig. 63.



plans. Désignons par P'_n la tension au point M, P'_i, P'_j, P'_k les tensions aux points M_1, M_2, M_3. Soit, d'autre part, $\rho\varpi\, dV$ la force directement appliquée à un élément de volume dV dont la densité est q.

Le tétraèdre, ayant pris son état d'équilibre, restera en équilibre si nous le supposons rigide. Nous écrivons donc la première équation d'équilibre sous la forme

$$\int P'_n\, d\sigma + \int P'_i\, d\sigma_1 + \int P'_j\, d\sigma_2 + \int P'_k\, d\sigma_3 + \int q\varpi\, dV = 0.$$

Soient α, β, γ les cosinus directeurs de la normale n. On a

$$d\sigma_1 = -\alpha\, d\sigma, \qquad d\sigma_2 = -\beta\, d\sigma, \qquad d\sigma_3 = -\gamma\, d\sigma$$

à cause de la direction intérieure de n. D'autre part, en vertu de la continuité, si nous désignons respectivement par P_n P_i, P_j, P_k, les tensions au point O sur un plan mené par ce point parallèlement à ABC et sur les plans BOC, etc., nous pouvons écrire

$$P'_n = P_n + \delta P_n, \qquad P'_i = P_i + \delta P_i, \qquad \ldots.$$

Si nous désignons par σ l'aire du triangle ABC l'équation de l'équilibre devient alors

$$\begin{aligned} &P_n - \alpha P_i - \beta P_j - \gamma P_k \\ &\quad + \frac{1}{\sigma}\int (\delta P_n - \alpha\,\delta P_i - \beta\,\delta P_j - \gamma\,\delta P_k)\, d\sigma + \frac{1}{\sigma}\int q\varpi\, dV = 0. \end{aligned}$$

La fonction P étant continue (hypothèse), il est facile de voir que la seconde ligne est nulle. Par exemple, on a

$$\int \delta P_n \, d\sigma = \int \operatorname{mod} \delta P_n \, d\sigma \leqq \mu_0 \int d\sigma = \mu_0 \sigma,$$

μ_0 étant le maximum du module de δP_n. Or μ_0 a pour limite zéro. On a donc finalement

$$P_n = \alpha P_i + \beta P_j + \gamma P_k.$$

Or α, β, γ sont les composantes du vecteur unité n. P_i, P_j, P_k sont des fonctions indépendantes de n, mais dépendant du point O. Il en résulte que P_n *est une fonction linéaire de* n.

L'équation des moments va nous montrer que cette fonction est *autoconjuguée*. Remarquons d'abord qu'on a

$$\alpha = -S in, \qquad \beta = -S jn, \qquad \gamma = -S kn,$$

de sorte que P_n peut s'écrire sous forme de dyadique

$$(1) \qquad P_n = -(P_i i + P_j j + P_k k) n,$$

P_i, P_j, P_k représentent les valeurs que prend P_n lorsque la normale coïncide successivement avec les axes i, j, k.

170. Équations indéfinies de l'équilibre. — Avant d'écrire l'équation des moments, écrivons d'abord l'équation d'équilibre d'un volume V dont la surface est S et que nous supposons séparé du corps et rendu rigide après qu'il a pris sa position d'équilibre.

Cette première équation est évidemment, d'après ce qui précède,

$$\int q \varpi \, dV + \int P_n \, d\sigma = 0,$$

ce qui peut s'écrire (*cf.* **154**),

$$\int \left(-q\varpi + \frac{\partial P_i}{\partial x} + \frac{\partial P_j}{\partial y} + \frac{\partial P_k}{\partial z} \right) dV = 0.$$

Mais le volume V étant quelconque, on a donc l'équation

$$(2) \qquad q\varpi = \frac{\partial P_i}{\partial x} + \frac{\partial P_j}{\partial y} + \frac{\partial P_k}{\partial z},$$

première équation d'équilibre.

Écrivons maintenant l'équation des moments. Soit ρ le vecteur d'un point variable intérieur au volume V ou situé sur la surface S. On

aura l'équation

$$\int \rho V q \varpi \, dV + \int V \rho P_n \, d\sigma = 0.$$

Transformons le second terme d'après le procédé du n° **154**. Nous avons, en appliquant le résultat de l'Exercice II (**154**),

$$\int V \rho P_n \, d\sigma = \int V \rho \left(\frac{\partial P_i}{\partial x} + \frac{\partial P_j}{\partial y} + \frac{\partial P_k}{\partial z} \right) dV$$
$$- \int V(iP_i + jP_j + kP_k) \, dV.$$

L'équation des moments devient donc

$$\int V \rho \left(q \varpi - \frac{\partial P_i}{\partial x} - \ldots \right) dV - \int V(iP_i - \ldots) \, dV = 0.$$

Le premier terme est nul (première équation d'équilibre). D'autre part, dV étant quelconque, on a

$$(3) \qquad V(iP_i + jP_j + kP_k) = 0,$$

ce qui exprime [**109**, (4)] que P_n *est un tenseur*.

Il en résulte d'après une propriété connue du tenseur, à savoir qu'on a, quels que soient les vecteurs ρ et σ,

$$S \rho \varphi \sigma = S \sigma \varphi \rho,$$

qu'en appelant $P_{n,n'}$ la projection sur le vecteur unité n' de la tension P_n sur le plan dont la normale est n, on a

$$(4) \qquad P_{n,n'} = P_{n',n}.$$

Les équations (1) et (4) expriment vectoriellement le *théorème fondamental de Cauchy* (1827). L'équation (4) exprime que les six composantes tangentielles des tensions sur des plans perpendiculaires à Ox, Oy, Oz, ces composantes étant respectivement parallèles à Ox, Oy, Oz, se réduisent à trois.

L'usage a fait admettre les notations suivantes. On désigne par N_1, N_2, N_3 les composantes normales sur des plans perpendiculaires à Ox, Oy, Oz.

T_1, T_2, T_3 les composantes tangentielles sur des plans perpendiculaire à Ox, Oy, Oz et l'on a le Tableau suivant :

	Composantes parallèles à		
	Ox.	Oy.	Oz.
Sur un plan normal à Ox	N_1	T_3	T_2
Sur un plan normal à Oy	T_3	N_2	T_1
Sur un plan normal à Oz	T_2	T_1	N_3

On a donc pour P_i, P_j, P_k les valeurs suivantes :

$$(5)\qquad \begin{cases} P_i = N_1 i + T_3 j + T_2 k, \\ P_j = T_3 i + N_2 j + T_1 k, \\ P_k = T_2 i + T_1 j + N_3 k. \end{cases}$$

Surface des tensions. — Posons

$$\varphi n = -(P_i i + P_j j + P_k k) n.$$

La tension normale en un point sur un plan dont la normale est n sera

$$P_{n,n} = -n(P_i i + P_j j + P_k k) n = S n \varphi n.$$

Portons sur la normale au plan et dans sa direction une longueur égale à $1 : \sqrt{\text{mod. } P_{k,n}}$. Nous obtenons ainsi une surface du second ordre.

$$S \rho \varphi \rho = 1.$$

Cette surface s'appelle *surface des tensions*. La composition de la fonction φ est donnée par (5). Nous savons qu'il y a toujours au moins trois directions que l'opération ne modifie pas. Dans ces conditions, n étant normal à un plan, P est normal à ce même plan. *Il y a donc en chaque point trois plans rectangulaires au moins sur lesquels la tension est normale.* Ces plans sont appelés *plans principaux pour le point considéré*, et les tensions exercées sur ces plans *tensions principales*.

Le cône asymptote de la surface des tensions, ou

$$S \rho \varphi \rho = 0$$

est l'enveloppe des plans sur lesquels la tension normale est nulle.

Il peut être réel ou imaginaire suivant la forme de la fonction φ.

Ellipsoïde de Lamé (1833). — On obtient un autre quadrique qui est *toujours un ellipsoïde*, en portant sur chacune des directions autour du point O du corps, une longueur égale à la valeur de la tension suivant cette direction. En effet, de l'équation

$$P_n = \varphi n,$$

on tire

$$n = \varphi^{-1} P_n$$

et par suite

$$T \varphi^{-1} P_n = 1,$$

équation qui représente un ellipsoïde. On l'appelle *ellipsoïde de Lamé*.

Les axes de cet ellipsoïde ont même direction que ceux de la surface des tensions. Cela résulte que, suivant ces directions, on a

$$P_n = gn$$

et, par suite, d'après l'équation d'Hamilton (**106** — H),

$$m\varphi^{-1} = m_1 - m_2\varphi + \varphi^2,$$

on a dans ces directions

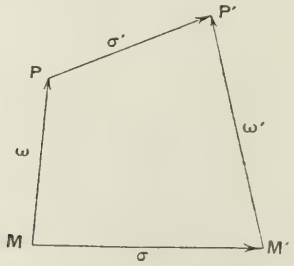
$$m\varphi^{-1}P_n = (m_1 g - m_2 g^2 + g^3)n,$$

c'est-à-dire un vecteur parallèle à n.

171. Déplacement général d'un système de points. — Nous considérons dans ce qui suit un système de points infiniment rapprochés et qui se déplacent de manière que leurs distances mutuelles ne restent pas invariables comme on en fait l'hypothèse dans le cas des corps dits *rigides*. Nous supposons que le déplacement σ d'un point soit une fonction continue et monodrome des coordonnées de ce point et que les déplacements soient très petits.

Soit M un de ces points (*fig.* 64) et σ son déplacement. Le point M vient en M′ et un point P voisin du point M et dont la position est

Fig. 64.



déterminée par le vecteur $P - M = \omega$, vient lui-même en P′. Le déplacement de P sera, d'après l'hypothèse admise de la continuité (**168**) :

$$P' - P = \sigma' = \sigma + (\omega\nabla)\sigma,$$

et on aura

$$P' - M' = \omega' = -\sigma + \omega + \sigma' = \omega + (\sigma' - \sigma),$$

ou bien

$$\omega' = \omega + (\omega\nabla)\sigma. \tag{1}$$

ω' est donc une *fonction linéaire de* ω. Par suite, une surface (P), lieu d'un point P autour du point M, reste du même degré après le déplacement. Un plan reste un plan, une droite reste une droite, une sphère devient un ellipsoïde.

Nous supposerons que les déplacements sont tels que les différences $\delta\omega = \omega' - \omega$ restent très petites par rapport à ω et nous les traiterons comme des différentielles.

172. Décomposition d'un déplacement. — Posons (φ n'étant plus le même que celui du n° 170)

$$-(\omega\nabla)\sigma = \varphi\omega.$$

Nous pouvons écrire (104) :

$$\sigma' = \sigma + \frac{1}{2}(\varphi - \varphi')\omega + \frac{1}{2}(\varphi + \varphi')\omega.$$

Le déplacement σ' du point P se compose donc de trois parties :

1° *Une translation* σ égale à celle du point M.

2° *Une rotation* $\frac{1}{2}(\varphi - \varphi')\omega = V\varepsilon\omega$ autour d'un axe passant par le point M.

3° *Un déplacement* $\frac{1}{2}(\varphi + \varphi')\omega = \psi\omega$ où ψ est une fonction linéaire autoconjuguée, que nous pouvons représenter comme il suit.

Considérons les surfaces homothétiques ayant leur centre en M

$$S\rho\psi\rho = h.$$

La surface passant au point P sera déterminée par $S\omega\psi\omega = h$. Le plan tangent à cette surface en P est (112)

$$S\rho\psi\omega = h.$$

$\psi\omega$, c'est-à-dire le déplacement, est donc *normal à la surface* qui passe par ce point. Soit d la grandeur de ce déplacement et p la perpendiculaire abaissée du centre M sur le plan tangent, on a en valeur absolue [1]

$$p = \frac{h}{d} \qquad \text{d'où} \qquad d = \frac{h}{p}.$$

On voit donc que le déplacement total se compose d'une *transla-*

---

[1] Car en posant $\psi\omega = \nu$ le point $p\nu_0$ est dans le plan tangent au point ν et on a $Sp\nu_0 . d\nu_0 = h$.

tion, d'une *rotation autour d'un axe* et d'une *déformation*.

La translation est déterminée par σ.

La rotation est déterminée par ε (*rotation élémentaire*).

La déformation est déterminée par les six éléments du tenseur ψ (*déformations élémentaires*). Une déformation ψ du genre de celle qui a lieu ici s'appelle une *déformation pure* (pure strain).

Les éléments importants de la déformation sont la dilatation linéaire et les glissements élémentaires.

La *dilatation linéaire* est le rapport de l'accroissement d'une petite longueur autour du point M à la longueur primitive; on a

$$r^2 = -\omega^2, \qquad r\,\delta r = -\omega\,\delta\omega = -\omega\psi\omega,$$

car

$$\delta\omega = \omega' - \omega = -(\omega\nabla)\sigma = \psi\omega,$$

ou bien, en appelant a la dilatation linéaire,

$$a = \frac{\delta r}{r} = -\omega_0\psi\omega_0.$$

Quand la direction ω_0 coïncide successivement avec les axes i, j, R, les valeurs correspondantes des dilatations linéaires sont :

$$a_1 = -i\psi i, \qquad a_2 = -j\psi j, \qquad a_3 = -k\psi k,$$

on en déduit (puisque $\psi i = -(i\nabla)\sigma = \frac{\partial\sigma}{\partial x}$, etc.)

$$a_1 + a_2 + a_3 = -S\left(i\frac{\partial\sigma}{\partial x} + j\frac{\partial\sigma}{\partial y} + k\frac{\partial\sigma}{\partial z}\right) = \operatorname{div}\sigma.$$

La *dilatation angulaire* est la variation δV de l'angle formé par deux directions avant et après déformation. Soient P_1 et P_2 deux points voisins de M. On a, en désignant par r_1 et r_2 les distances MP_1 et MP_2 et par V leur angle :

$$r_1 r_2 \cos V = -\omega_1\omega_2,$$

d'où, par différentiation,

$$\cos V\,\delta(r_1 r_2) - r_1 r_2 \sin V\,\delta V = -\omega_1\delta\omega_2 - \omega_2\delta\omega_1.$$

Supposons $V = \frac{\pi}{2}$, on aura :

$$r_1 r_2\,\delta V = \omega_1\delta\omega_2 + \omega_2\delta\omega_1.$$

En particulier, si nous considérons le parallélipipède élémentaire dont les arêtes sont parallèles à i, j, k, nous aurons pour i et j, par

exemple,

$$\frac{\omega_1}{r_1} = i, \qquad \frac{\omega_2}{r_2} = j;$$

d'où

$$\frac{\delta\omega_1}{r_1} = (i\nabla)\sigma, \qquad \frac{\delta\omega_2}{r_2} = (j\nabla)\sigma,$$

et par suite

$$\delta V = (i\nabla)\sigma + (j\nabla)\sigma.$$

On désigne par $2b_1$, $2b_2$, $2b_3$ les *diminutions* des angles primitivement droits de ce parallélipipède et on les appelle *glissements élémentaires*. On a alors

$$2b_3 = S[i(j\nabla)\sigma + j(i\nabla)\sigma],$$
$$2b_1 = S[j(k\nabla)\sigma + k(j\nabla)\sigma],$$
$$2b_2 = S[k(i\nabla)\sigma + i(k\nabla)\sigma].$$

On voit que si l'on pose

$$\sigma = s_1 i + s_2 j + s_3 k,$$

on a

$$2b_1 = \frac{ds_3}{dy} + \frac{\partial s_2}{\partial z}, \qquad 2b_2 = \frac{\partial s_1}{\partial z} + \frac{\partial s_3}{\partial x}, \qquad 2b_3 = \frac{\partial s_2}{\partial x} + \frac{\partial s_1}{\partial y},$$

où s_1, s_2, s_3 sont les composantes de σ suivant les axes i, j, k. Si nous portons dans chaque direction autour du point M une longueur égale à l'inverse de la racine carrée du module de la dilatation dans la direction considérée, nous aurons $\rho = \frac{1}{\sqrt{\pm a}}\omega_1$, d'où $\omega_0 = \rho V \sqrt{\pm a}$ et nous obtenons donc la surface

$$S\omega\omega = \pm 1,$$

qu'on appelle *surface des dilatations*. S'il y a dilatation en tous sens autour du point M, la surface est un *ellipsoïde*. S'il y a dilatation dans certaines directions et condensations dans d'autres, elle est formée de deux *hyperboloïdes conjugués*.

On sait qu'il existe trois directions formant un triplet trirectangulaire qui reste triangulaire par la transformation. En prenant, en effet, les axes de la surface de dilatation comme axes i, j, k, on a

$$b_1 = b_2 = b_3 = 0.$$

Les dilatations dans ces directions sont appelées *dilatations principales*.

173. Dilatation cubique. — La déformation change le volume d'un

élément autour du point M. Le rapport de l'accroissement de ce volume à sa valeur primitive s'appelle la *dilatation cubique*. Un volume quelconque autour du point M étant décomposable en tétraèdres ayant ce point pour sommet, il suffit d'évaluer la dilatation cubique pour le tétraèdre.

Soient P_1, P_2, P_3, trois points voisins. On a

$$V = \frac{1}{6} S \omega_1 \omega_2 \omega_3,$$

$$V' = \frac{1}{6} S (\omega_1 + \delta\omega_1)(\omega_2 + \delta\omega_2)(\omega_3 + \delta\omega_3);$$

d'où

$$\frac{\delta V}{V} = \frac{V' - V}{V} = \frac{S\, \delta\omega_1 \omega_2 \omega_3 + \ldots}{S \omega_1 \omega_2 \omega_3},$$

ou bien

$$= \frac{S\, \omega_2 \omega_3 \varphi \omega_1 + \ldots}{S \omega_1 \omega_2 \omega_3},$$

et comme φ est un tenseur

$$\frac{\delta V}{V} = m_2,$$

où m_2 est un invariant de la cubique en φ.

Ce rapport ne dépend pas de l'orientation du tétraèdre. Le résultat est donc le même pour un volume quelconque autour de M. On a donc

$$\frac{\delta V}{V} = m_2 = \operatorname{div} \sigma = a_1 + a_2 + a_3.$$

Nous désignerons suivant cette quantité par θ, ou bien

$$\theta = \frac{\delta V}{V} = \operatorname{div} \sigma.$$

Remarque. — On remarquera que, dans ce qui précède, nous n'avons fait intervenir que la notion de continuité de la déformation et que, par conséquent, les résultats obtenus s'appliquent tout aussi bien aux fluides qu'aux solides. Pour appliquer ces résultats aux fluides et en particulier à l'hydraulique, il suffit d'introduire la *pression p en un point* au lieu de la pression P *sur un plan* et de tenir compte du fait expérimental que, pour un liquide dépourvu de frottement et de viscosité, la pression p est toujours normale au plan sur lequel elle s'exerce et que sa grandeur est indépendante de l'orientation de ce plan. On trouve alors que, l'équation d'équilibre étant satisfaite, l'équation des moments devient une identité, de sorte qu'il

n'y a plus pour l'équilibre qu'une seule équation (vectorielle équivalente à 3 équations scalaires) (*voir* n° **182**).

174. Relations entre les tensions et les déformations [1]. — L'hypothèse fondamentale de la théorie de l'élasticité consiste à admettre que les actions mutuelles de deux points matériels cessent d'être sensibles *dès que la distance de ces points dépasse une limite très petite* et que ces actions sont indépendantes du temps.

Il en résulte que la tension sur un plan en un point M, après le déplacement de ce point, dépend uniquement de la déformation subie par les points d'un domaine très petit autour du point M, c'est-à-dire des valeurs des a et des b au point M. Les (N, T) sont donc des fonctions des a et des b, et nous *supposerons* que nous pouvons réduire leur développement en série de Maclaurin aux termes du premier ordre, c'est-à-dire que les (N, T) sont des *fonctions homogènes et linéaires* des (a, b) en supposant que le corps parte de l'état *naturel*, c'est-à-dire de celui où il n'existe aucune tension.

On a donc ainsi 36 coefficients qui dépendent de la constitution du système et, par suite, des coordonnées x, y, z. Nous supposons le corps *homogène et isotrope*. Les coefficients sont alors constants et leur nombre se réduit par les considérations suivantes. Posons

$$(\mathrm{A}) \qquad \begin{cases} \mathrm{N} = \varphi(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3), \\ \mathrm{T} = \psi(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3), \end{cases}$$

φ et ψ étant des fonctions linéaires et homogènes. Le principe de la réduction du nombre des coefficients dû à Lamé (1856) (*Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des solides*) est le suivant (*voir* Sarrau, *loc. cit.*).

Supposons que nous opérions un changement d'axes de coordonnées et que le système présente dans son état naturel la même disposition par rapport aux deux systèmes d'axes S et S'. Dans le deuxième système, les (N, T) sont devenus (N', T') et les (a, b) sont sont devenues (a', b'). Il est clair, d'après les hypothèses admises, que les expressions des (N', T') au moyen des (a', b') seront les mêmes que celles des (N, T) au moyen des (a, b). Nous exprimerons donc (N', T') au moyen des (N, T) par les formules des chan-

---

[1] *Voir* Sarrau, *Leçons de Mécanique à l'École Polytechnique* (1884-1885) ou la brochure déjà citée du même auteur (G.-V., 1889). *Voir* aussi Bouasse, *Mécanique physique*, p. 22 et suivantes.

gements de coordonnées et nous remplacerons dans les formules ainsi obtenues les (a, b) par leurs expressions en fonction des $(a' b')$. Nous obtiendrons ainsi des valeurs qui, en supprimant les accents, doivent nous donner les mêmes expressions que les (N, T) en fonction des (a, b).

Par exemple, supposons qu'il existe *un plan de symétrie* passant par le point M à l'état naturel. Prenons la normale à ce plan comme axe OX, et soient OY et OZ deux axes dans le plan. Si nous changeons l'axe OX de direction, les propriétés du corps étant symétriques par rapport au plan, on a (*voir* tableau n° **170**)

$$\begin{aligned} N'_1 &= N_1, & N'_2 &= N_2, & N'_3 &= N_3, \\ T'_1 &= T_1, & T'_2 &= -T_2, & T'_3 &= -T_3. \end{aligned}$$

Cela résulterait des formules de transformation des coordonnées. On a de même

$$\begin{aligned} a_1 &= a'_1, & a_2 &= a'_2, & a_3 &= a'_3, \\ b_1 &= b'_1, & b_2 &= -b'_2, & b_3 &= -b'_3. \end{aligned}$$

Les relations linéaires (A) doivent donc rester les mêmes quand on change à la fois les signes de T_2, T_3, b_2, b_3. Il en résulte que les N ne doivent pas contenir b_2, b_3 et que T_2 et T_3 ne doivent contenir que b_2 et b_3 ou bien

$$\begin{aligned} N_{1,2,3} &= \varphi_{1,2,3}(a_1, a_2, a_3, b_1), \\ T_1 &= \psi_1(a_1, a_2, a_3, b_1), \\ T_{2,3} &= \psi_{2,3}(b_2, b_3). \end{aligned}$$

Il reste ainsi 20 coefficients.

En procédant d'une manière analogue et en supposant *trois plans de symétrie* le nombre des coefficients se réduit à *douze*.

Enfin, en supposant le corps homogène et isotrope, ce qui exige que les valeurs (A) ne dépendent pas de la direction particulière choisie par les axes de coordonnées et se transforment en elles-mêmes par un changement d'axes rectangulaires quelconques, on arrive, au moyen de calculs que nous ne développerons pas et que le lecteur trouvera dans la brochure de Sarrau déjà citée, à réduire le nombre des coefficients à deux et à mettre les (N, T) sous la forme

$$(\mathrm{H}) \qquad \left\{ \begin{aligned} N_1 &= \lambda\theta + 2\mu a_1, & T_1 &= 2\mu b_1, \\ N_2 &= \lambda\theta + 2\mu a_2, & T_2 &= 2\mu b_2, \\ N_3 &= \lambda\theta + 2\mu a_3, & T_3 &= 2\mu b_3, \end{aligned} \right.$$

λ et μ s'appellent les *paramètres de Lamé*.

Si nous remplaçons dans ces formules les (a, b) par leurs valeurs en fonction des déplacements (**172**), nous obtenons

$$(\mathrm{H}_1)\quad \begin{cases} \mathrm{N}_1 = \lambda\theta + 2\mu\dfrac{\partial s_1}{\partial x}, & \mathrm{T}_1 = \mu\left(\dfrac{\partial s_3}{\partial y} + \dfrac{\partial s_2}{\partial z}\right), \\ \mathrm{N}_2 = \lambda\theta + 2\mu\dfrac{\partial s_2}{\partial y}, & \mathrm{T}_2 = \mu\left(\dfrac{\partial s_1}{\partial z} + \dfrac{\partial s_3}{\partial x}\right), \\ \mathrm{N}_3 = \lambda\theta + 2\mu\dfrac{\partial s_3}{\partial z}, & \mathrm{T}_3 = \mu\left(\dfrac{\partial s_2}{\partial x} + \dfrac{\partial s_1}{\partial y}\right), \end{cases}$$

avec

$$\sigma = s_1 i + s_2 j + s_3 k.$$

En désignant encore par q la densité, on pose souvent

$$\frac{\lambda + 2\mu}{q} = \Omega^2, \qquad \frac{\mu}{q} = \omega^2.$$

Les quantités Ω^2 et ω^2, qui sont toujours positives s'appellent alors *constantes d'isotropie*.

175. Tension sur un plan quelconque. — La tension P_i sur un plan normal à i est donnée par l'expression

$$\mathrm{P}_i = \mathrm{N}_1 i + \mathrm{T}_3 j + \mathrm{T}_2 k,$$

ou bien, en remplaçant N_i, T_3, T_2 par leurs valeurs,

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_i &= \left(\lambda\theta + 2\mu\frac{\partial s_1}{\partial x}\right) i + \mu\left(\frac{\partial s_2}{\partial x} + \frac{\partial s_1}{\partial y}\right) j + \mu\left(\frac{\partial s_1}{\partial z} + \frac{\partial s_3}{\partial x}\right) k \\ &= \lambda\theta i + 2\mu\left(i\frac{\partial s_1}{\partial x} + j\frac{\partial s_2}{\partial x} + k\frac{\partial s_3}{\partial x}\right) + \mu\left[j\left(\frac{\partial s_1}{\partial y} - \frac{\partial s_2}{\partial x}\right) + k\left(\frac{\partial s_1}{\partial z} - \frac{\partial s_3}{\partial x}\right)\right], \end{aligned}$$

$$(p)\qquad \mathrm{P}_i = \lambda\theta i - 2\mu(i\nabla)\sigma + \mu\nabla i \operatorname{rot}\sigma.$$

Mais i étant une direction quelconque, on peut remplacer i par n et l'on a, en remplaçant en même temps θ par sa valeur div σ

$$(1)\qquad \mathrm{P} = \lambda n \operatorname{div}\sigma - 2\mu(n\nabla)\sigma + \mu\nabla n \operatorname{rot}\sigma.$$

Telle est *la tension sur un plan dont la normale est n*, lorsque le déplacement σ est une fonction connue.

Ce sera un exercice utile de retrouver cette formule en partant de l'expression

$$\mathrm{P} = -(\mathrm{P}_i i + \mathrm{P}_j j + \mathrm{P}_k k)n,$$

remplaçant P_i, P_j, P_k par leurs valeurs et faisant l'addition des termes semblables.

On peut aussi écrire [129 (3)]

$$(\alpha) \qquad \nabla(n\sigma) = (n\nabla)\sigma - \mathrm{V}\, n \operatorname{rot}\sigma,$$

de sorte que l'expression (1) prend la forme

$$(2) \qquad \mathrm{P} = \lambda n \operatorname{div}\sigma - \mu(n\nabla)\sigma - \mu\nabla(n\sigma).$$

Cherchons la *composante normale* et la *composante tangentielle* de la tension. On a

$$\mathrm{N} = -n(\mathrm{P}n),$$

d'où par (1)

$$(3) \qquad \mathrm{N} = \lambda n \operatorname{div}\sigma + 2\mu n \mathrm{S}\, n(n\nabla)\sigma.$$

Cette valeur se déduit d'ailleurs immédiatement de l'expression de N_1 dans P_i. En tenant compte de (α), on peut aussi écrire

$$(4) \qquad \mathrm{N} = \lambda n \operatorname{div}\sigma + 2\mu n \mathrm{S}\, n\nabla(n\sigma).$$

On a ensuite

$$\mathrm{T} = \mathrm{P} - \mathrm{N} = \mu \mathrm{V}\, n \operatorname{rot}\sigma - 2\mu(n\nabla)\sigma - 2\mu n \mathrm{S}\, n\nabla(n\sigma),$$

ou bien, en remarquant que n est une constante relativement à ∇

$$(5) \qquad \mathrm{T} = \mu \mathrm{V}\, n \operatorname{rot}\sigma - 2\mu(n\nabla)\mathrm{V}\, n \mathrm{V}\, \sigma n.$$

Si nous remplaçons la notation conventionnelle $(n\nabla)$ par la notation effective $\dfrac{d}{dn}$, nous obtenons donc les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P} &= \lambda n \operatorname{div}\sigma + 2\mu \frac{d\sigma}{dn} - \mu \mathrm{V}\, n \operatorname{rot}\sigma \\
&= \lambda n \operatorname{div}\sigma + \mu \frac{d\sigma}{dn} - \mu\nabla(n\sigma), \\
\mathrm{N} &= \lambda n \operatorname{div}\sigma - 2\mu n \mathrm{S}\, n \frac{d\sigma}{dn} \\
&= \lambda n \operatorname{div}\sigma + 2\mu n \mathrm{S}\, n\nabla(n\sigma), \\
\mathrm{T} &= \mu \mathrm{V}\, n \operatorname{rot}\sigma + 2\mu \frac{d\sigma}{dn} - 2\mu n \mathrm{S}\, n\nabla(n\sigma) \\
&= \mu \mathrm{V}\, n \operatorname{rot}\sigma + 2\mu \frac{d}{dn} \mathrm{V}\, n \mathrm{V}\, \sigma n,
\end{aligned}$$

n doit y être regardé comme un vecteur constant, car n indique la direction de la normale au plan déterminé sur lequel on cherche la tension.

Ces équations supposent que l'on connaît le déplacement σ. C'est en effet de cette manière que l'on opère dans les applications de la

théorie de l'élasticité, faute de pouvoir procéder autrement, les équations auxquelles on parvient présentant dans leur généralité des difficultés d'intégration insurmontables. On suppose alors que les forces appliquées au corps produisent une certaine déformation, dont la forme est suggérée par les résultats d'expérience obtenus dans le cas de déformations *très petites*, et l'on cherche à satisfaire aux équations de l'équilibre. Nous donnons ci-après des exemples de cette manière de procéder.

176. Équation de l'équilibre et du mouvement intérieur pour les corps isotropes. — La fonction P, qui représente la tension, satisfait à l'équation (170)

$$\frac{\partial P_i}{\partial x} + \frac{\partial P_j}{\partial y} + \frac{\partial P_k}{\partial z} - q\varpi = 0,$$

et si le système se déforme ou vibre, on doit ajouter aux forces appliquées les forces d'inertie $-q\frac{\partial^2 \sigma}{dt^2}$. On a donc l'équation

$$\frac{\partial P_i}{\partial x} + \frac{\partial P_j}{\partial y} + \frac{\partial P_k}{\partial z} - q\varpi = q\frac{d^2\sigma}{dt^2}.$$

Pour exprimer cette équation en fonction des déplacements, remplaçons-y les P par leurs valeurs [175 (*p*)], en tenant compte de l'équation

$$\theta = \operatorname{div}\sigma.$$

Il vient

$$\begin{aligned}
&\lambda\left(i\frac{\partial\theta}{\partial x} + j\frac{\partial\theta}{\partial y} + k\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)\\
&\quad + \mu\left[i\left(\frac{\partial^2 s_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 s_2}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 s_3}{\partial x\,\partial z}\right) + j\left(\frac{\partial^2 s_1}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 s_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s_3}{\partial y\,\partial z}\right)\right.\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \left. + k\left(\frac{\partial^2 s_1}{\partial x\,\partial z} + \frac{\partial^2 s_2}{\partial y\,\partial z} + \frac{\partial^2 s_3}{\partial z^2}\right)\right]\\
&\quad + \mu\left[i\left(\frac{\partial^2 s_1}{\partial x^2} + \ldots\right) + j(\ldots) + k(\ldots)\right],
\end{aligned}$$

ou bien (nous recommandons au lecteur de faire le calcul complet)

$$(\mathrm{I}) \qquad (\lambda + \mu)\nabla\theta - \mu\nabla^2\sigma - q\varpi = q\frac{d^2\sigma}{dt^2},$$

où l'on a

$$\nabla^2\sigma = -\left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\sigma}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\sigma}{\partial z^2}\right).$$

L'équation (I) est l'*équation indéfinie* applicable à tous les points du système.

Mais, en général, des efforts extérieurs agissant sur le système aux limites du corps, il en résulte de nouvelles équations qui doivent être satisfaites à la surface et que l'on appelle *équations définies* ou *à la surface*. Ces équations s'obtiennent en écrivant que, pour un élément plan à la surface l'effet extérieur qui s'exerce en ce point a la même grandeur et la même direction que la tension correspondante.

Soient pour un point de la surface limite F l'effort extérieur par unité de surface, n la normale unité *extérieure*, $P = N + T$ la tension. On aura

$$N + T = F,$$

où F est une fonction connue de x, y, z. On en déduira une fonction σ qui doit aussi, dans toute l'étendue du corps, satisfaire aux équations indéfinies.

Dans le cas de l'équilibre, σ est indépendant du temps. Si nous supposons de plus que les forces à la surface sont seules agissantes, $\varpi = 0$ et nous avons

$$(I_1) \qquad (\lambda - \mu)\nabla\theta - \mu\nabla^2\sigma = 0 \text{ (}^1\text{)}.$$

On a alors à trouver une fonction σ satisfaisant à cette équation différentielle et également aux conditions à la surface. On sait par la théorie analytique que la solution de ce problème, si elle existe, est unique. Si nous trouvons *une* solution par un procédé quelconque, ce sera donc *la solution* du problème.

En particulier, si les déplacements dérivent d'un potentiel, c'est-à-dire si l'on a $\sigma = \nabla u$, il vient

$$\theta = \operatorname{div}\sigma = \operatorname{div}\nabla u = -\nabla^2 u.$$

Or on a

$$\nabla^2\sigma = \operatorname{rot}^2\nabla u - \nabla\operatorname{div}\nabla u = -\nabla\operatorname{div}\sigma;$$

d'où

$$(\lambda + \mu)\nabla\operatorname{div}\sigma - \mu\nabla\operatorname{div}\sigma = 0;$$

c'est-à-dire que si

$$\lambda + 2\mu \neq 0,$$

on a

$$\nabla\operatorname{div}\sigma = 0 \qquad \text{ou} \qquad \operatorname{div}\sigma = \text{const.}$$

L'équation de l'équilibre (intérieur) exprime donc simplement dans ce cas que *la dilatation cubique est constante*.

---

(1) Avec les notations de la note n° 174 et en remplaçant ∇^2 par sa valeur $\operatorname{rot}^2 - \nabla\operatorname{div}$, cette équation s'écrit $\Omega^2\nabla\operatorname{div}\sigma - \omega^2\operatorname{rot}^2\sigma = 0$.

Nous allons maintenant donner quelques exemples simples de l'application des principes qui précèdent. Il ne faut pas oublier d'ailleurs que les résultats que nous allons obtenir ne s'appliquent qu'à des déformations *très petites*, car la théorie que nous avons établie suppose essentiellement que cette condition est remplie.

Exemples d'équilibre.

177. Compression normale et uniforme. — Considérons un solide soumis à sa surface à une compression F par unité de surface. On a, à la surface,

$$-F = T + N.$$

Essayons de représenter les déplacements par l'équation

$$\sigma = -a\rho,$$

l'origine étant fixe. Cette expression signifie que la contraction *linéaire* est proportionnelle à la longueur : l'équation indéfinie (I_1) est alors satisfaite. On a

$$\theta = \operatorname{div}\sigma = -3a.$$

Les équations (H) (**173**) donnent alors pour les N la valeur commune $-(3\lambda + 2\mu)\,a$ et pour les T la valeur zéro. On doit donc avoir

$$a = \frac{F}{3\lambda + 2\mu},$$

ce qui détermine la constante a.

La quantité $\frac{3\lambda + 2\mu}{3}$ s'appelle *module de compression*.

178. Extension longitudinale d'un prisme. — Nous considérons un solide prismatique dont les arêtes sont parallèles à θz, et nous supposons que ce prisme soit soumis à une traction F parallèle aux arêtes sur chacune des bases. L'expérience montrant qu'un solide prismatique soumis ainsi à l'extension subit à la fois un *allongement parallèle aux fibres* et une *contraction transversale*, suggère la solution

$$\sigma = \varphi\rho = (aii + ajj - ekk)\rho,$$

ou bien

$$s_1 = -ax, \qquad s_2 = \quad ay, \qquad s_3 = ez.$$

Nous allons voir que cette solution vérifie, en effet, les équations

d'équilibre. L'équation indéfinie (I_1) est satisfaite ($\nabla\theta = 0, \nabla^2\sigma = 0$). De plus les T sont nuls et les N sont constants (H).

$$N_1 = N_2 = (c - 2a)\lambda - 2a\mu,$$
$$N_3 = (c - 2a)\lambda + 2c\mu.$$

On satisfera donc aux équations en prenant

$$c = \frac{1 - \frac{\lambda}{\mu}}{3\lambda + 2\mu} F, \qquad a = \frac{1}{2} \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{3\lambda + 2\mu} F.$$

Le rapport

$$\frac{c}{a} = 2\left(1 - \frac{\mu}{\lambda}\right)$$

représente le rapport de l'allongement à la contraction transversale [1].

179. **Équilibre d'une couche sphérique.** — On considère un solide homogène et isotrope limité par deux sphères concentriques et soumis sur chacune des surfaces sphériques à une pression normale et uniforme. On se propose de déterminer l'état d'équilibre.

Il est clair que, par raison de symétrie, il y a lieu de supposer qu'un point M du solide se déplacera suivant le rayon qui le joint au centre de la sphère et que le déplacement sera le même pour tous les points qui se trouvent sur une sphère concentrique aux surfaces limites. On est donc amené à poser

$$\sigma = \rho_0 f(r) = f(r)\nabla r = \nabla \int f(r)\,dr \qquad (121\text{-}4),$$

σ dépendant ainsi d'un potentiel, il suffit d'exprimer que la dilatation cubique est constante, ou bien

$$\theta = \operatorname{div}\sigma = \operatorname{div} f(r)\nabla r = f(r)\operatorname{div}\nabla r - \nabla r\,\nabla f(r) \qquad (127\text{-}6)$$

ou

$$\theta = \frac{2}{r} f(r) + f'(r).$$

Par suite, c étant une constante,

$$\theta = 2\frac{f}{r} + \frac{df}{dr} = 3c$$

---

[1] Ce rapport s'appelle *coefficient de Poisson*.

qui a pour intégrale générale

$$f = cr + \frac{b}{r^2}.$$

Il faut maintenant déterminer b et c de manière à satisfaire aux équations aux limites. Les tensions sont nulles sur une surface sphérique concentrique à l'origine, car on a (175) $\operatorname{rot}\sigma = 0$, $V\sigma n = 0$. Par suite, N_1, N_2, N_3 sont les tensions principales.

Nous avons à calculer N sur les sphères extérieure et intérieure et à exprimer qu'elles sont égales à P_0 et P_1 ; or on a (P)

$$\begin{aligned} N &= \lambda n \operatorname{div}\sigma + 2\mu n S n \nabla(n\sigma) \qquad \text{avec} \qquad n = \rho_0 \\ &= 3\lambda n c + 2\mu n S \rho_0 \nabla[\rho_0 - \rho_0 f(r)] = 3c\lambda n + 2\mu n f'(r) \\ &= n\left[3\lambda c + 2\mu\left(c - \frac{2b}{r^2}\right)\right]. \end{aligned}$$

On a donc les deux équations

$$(3\lambda + 2\mu)c - \frac{4b\mu}{r_0^2} = -P_0,$$

$$(3\lambda + 2\mu)c - \frac{4b\mu}{r_1^2} = -P_1$$

qui déterminent le problème.

180. Équilibre d'une couche cylindrique. — Nous considérons maintenant un solide homogène et isotrope limité par deux cylindres de révolution coaxiaux et par deux plans perpendiculaires aux arêtes. Nous supposons que le solide est soumis sur chacune des bases à une traction normale et uniforme parallèle aux génératrices et sur chacune des nappes cylindriques à une pression normale et uniforme.

Le déplacement d'un point M du solide aura évidemment lieu par raison de symétrie dans un plan axial. Nous pouvons le décomposer en deux autres, l'un suivant le rayon de la section droite qui passe par ce point, l'autre suivant la parallèle à la génératrice. Nous allons montrer que l'on peut satisfaire aux conditions du problème en supposant que la première composante ne dépend que de r et que la seconde ne dépend que de z, c'est-à-dire l'ordonnée du point M parallèlement aux génératrices.

Soient donc $f(r)$ et cz les composantes (scalaires) du déplacement σ suivant le rayon de la section droite et suivant la génératrice. Ces composantes dérivent d'un potentiel

$$u = \int f(r)\,dr + \frac{1}{2}cz^2,$$

et par suite σ dérive d'un potentiel et il suffit d'exprimer que div σ est constante. On a

$$\sigma = \frac{f(r)}{r}(ix + jy) + czk.$$

Remarquant que

$$\operatorname{div} ix = \operatorname{div} yj = \operatorname{div} kz = 1,$$

on a

$$\theta = \operatorname{div}\sigma = f'(r) + r^{-1}f(r) + c;$$

on posera donc

$$f'(r) + r^{-1}f(r) + c = 2a;$$

d'où par l'intégrale générale

$$f(r) = ar + \frac{b}{r}$$

et par conséquent

$$\theta = 2a + c.$$

Il faut maintenant exprimer les conditions aux limites. On peut écrire

$$\sigma = \varpi_0 f(r) + czk,$$

en désignant par ϖ_0 le vecteur unité radial suivant le rayon du cylindre.

Pour les nappes, on a alors $n = \varpi_0$ et par [175, (P)], en appelant P la pression sur le cylindre,

$$-P = \lambda(2a + c) + 2\mu S\varpi_0 \nabla f(r),$$

ou bien, puisque $\nabla r = \varpi_0$,

$$-P = \lambda(2a + c) + 2\mu f'(r);$$

d'où les équations

$$-P_1 = \lambda(2a + c) + 2\mu a - 2\mu r_1^{-2} b \text{ nappe extérieure,}$$
$$-P_2 = \lambda(2a + c) + 2\mu a + 2\mu b r_2^{-2} \text{ nappe intérieure.}$$

Pour les bases, on a $n = k$. D'où $n\sigma = czk$ et $\nabla(n\sigma) = ck$. On a alors, puisque F est une traction,

$$F = \lambda(2a + c) + 2\mu c.$$

Ces trois équations déterminent a, b, c.

181. Équilibre de torsion d'un cylindre. — Étant donné un cylindre de révolution autour de OZ, nous supposons que sa base est fixe dans le plan des xy et nous considérons la déformation suivante

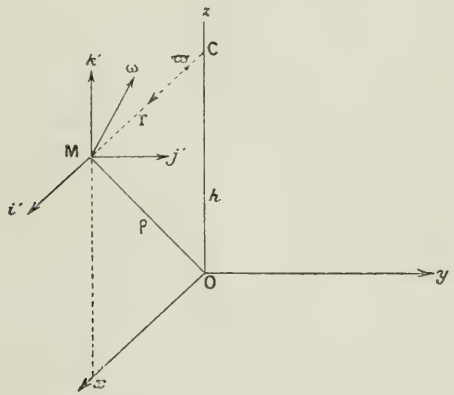
(*torsion*). L'axe OZ du cylindre reste rectiligne et une tranche horizontale du cylindre tourne autour de son centre sans que son altitude change, d'un angle φ proportionnel à la distance de cette tranche à la base fixe. Nous désignerons par R le rayon du cylindre, par ϖ_0 un vecteur unité radial perpendiculaire à l'axe et nous poserons

$$\varphi = th,$$

t étant une constante.

La déformation étant ainsi *donnée* nous allons chercher les forces moléculaires qui en résultent. C'est le problème inverse des précédents. Il peut toujours se résoudre car il n'exige que des différentiations (à condition bien entendu qu'il n'y ait pas de conditions surabondantes ou contradictoires). Prenons comme axes trois axes rectangulaires, OZ étant dirigé suivant l'axe du cylindre, et le plan XOZ passant par la position initiale du point M avant la déformation (*fig.* 65). L'axe OY sera perpendiculaire aux deux premiers

Fig. 65.



dans la direction habituelle. D'après l'hypothèse, le déplacement σ du point M est situé dans le plan $i'Mj'$, et l'on a

$$\overline{CM} + \sigma = k\varphi r\varpi_0 = (\cos\varphi + k\sin\varphi)r\varpi_0.$$

Mais φ étant supposé très petit, on posera $\cos\varphi = 1$, $\sin\varphi = \varphi$ et par suite

$$\sigma = trhVk\varpi_0.$$

Soit ρ le vecteur du point M. On a

$$\rho = hk + r\varpi_0$$

et par suite

$$\sigma = th\,\mathrm{V}k\rho.$$

On en déduit d'abord

$$\operatorname{div}\sigma = t\operatorname{div}(h\,\mathrm{V}k\rho) = t(h\operatorname{div}\mathrm{V}k\rho - \mathrm{S}\nabla h\,\mathrm{V}k\rho).$$

Mais on a

$$\nabla h = k \qquad \text{et} \qquad \operatorname{div}\mathrm{V}k\rho = \mathrm{S}k\operatorname{rot}\rho = 0;$$

d'où

$$\theta = \operatorname{div}\sigma = 0.$$

La déformation a lieu *sans changement de volume*.

Calculons la tension sur un plan quelconque au point M. On a (P)

$$\mathrm{P} = \lambda n\operatorname{div}\sigma + 2\mu\frac{d\sigma}{dn} + \mu\,\mathrm{V}n\operatorname{rot}\sigma$$

ou bien, puisque $\operatorname{div}\sigma = 0$,

$$\mathrm{P} = 2\mu\frac{d\sigma}{dn} + \mu\,\mathrm{V}n\operatorname{rot}\sigma.$$

Il faut donc calculer $\operatorname{rot}\sigma$. On a

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{rot}\sigma}{t} &= \operatorname{rot}h\,\mathrm{V}k\rho = h\operatorname{rot}\mathrm{V}k\rho + \mathrm{V}\nabla h\,\mathrm{V}k\rho\\ &= h[k\operatorname{div}\rho + (k\nabla)\rho] + \mathrm{V}k\,\mathrm{V}k\rho\ [\text{n}^{\text{o}}\ 127,\ (7)],\end{aligned}$$

car on a $\nabla h = \nabla z = k$. D'autre part $\operatorname{div}\rho = 3$ et $(k\nabla)\rho = -k$.

On trouve donc

$$\operatorname{rot}\sigma = 2thk - t\varpi,$$

où l'on pose

$$\varpi = r\varpi_0 = ri.$$

Calculons alors P en prenant successivement pour n les vecteurs i, j, k. On a

$$\frac{d\sigma}{dx} = th\,\mathrm{V}k\frac{\partial\rho}{\partial x} = thj,$$

$$\mathrm{V}i\operatorname{rot}\sigma = -2thj.$$

d'où

$$\mathrm{P}_i = 0.$$

Les tensions sur des plans perpendiculaires au rayon CM sont donc nulles et il n'existe *que des tensions tangentielles*.

Calculons de même P_j et P_k. On a

$$\frac{d\sigma}{dy} = th\,\mathrm{V}k\frac{\partial\rho}{\partial y} = -thi \qquad \text{et} \qquad \mathrm{V}j\operatorname{rot}\sigma = 2thi + trk$$

et par suite

$$\mathrm{P}_j = \mu trk.$$

On aura de même

$$\frac{d\sigma}{dz} = tVk\varphi - thVk\frac{\partial\varphi}{\partial z} = trj$$

et

$$Vk\,\mathrm{rot}\,\sigma = -trVk\varpi_0 = -trj;$$

d'où

$$P_k = \mu trj.$$

Il en résulte que la tension est tangentielle. Elle est représentée pour une direction quelconque n par la fonction binome (n° 109) :

$$P = -\mu tr(kj + jk)n.$$

La surface des dilatations

$$S n\varphi n = \pm 1$$

devient ici (ou du moins une surface homothétique)

$$S(xi + jy + kz)(kj + jk)(xi + yj + kz) = \pm 1,$$

ou bien

$$yz = \pm\frac{1}{2}$$

et se réduit à deux hyperboles équilatères situées dans le plan perpendiculaire au rayon vecteur.

Quand on fait varier n de toutes les manières possibles autour du point M, en posant,

$$n = xi + yj + zk \qquad \text{avec} \qquad Tn = 1,$$

on obtient

$$P = \mu tr(ky - jz).$$

On voit que cette équation représente *un cercle* auquel se réduit l'ellipsoïde des tensions. Ce cercle est dans un plan perpendiculaire à r et l'on reconnaît que P est symétrique de la direction (x, y) par rapport à la diagonale des axes jk. Suivant cette diagonale (et suivant celle qui lui est perpendiculaire) P coïncide donc en direction avec n. On obtient ainsi les *directions principales*. Ceci concorde avec ce que nous venons de voir pour la surface des dilatations, car les directions principales doivent être les axes des hyperboles équilatères que nous avons trouvées.

Le Tableau des tensions est donc le suivant :

Sur un plan perpendiculaire à Ox.....	0	0	0
» » à Oy.....	0	0	μtr
» » à Oz.....	0	μtr	0

Il est à remarquer que la tension ne dépend pas de h.

Déterminons maintenant le couple qui doit faire équilibre aux tensions intérieures. Nous cherchons pour cela le moment du couple des tensions intérieures par rapport à l'axe du cylindre. La seule force intervenant est la composante μtr parallèle à Oy.

La force μtr appliquée au petit élément de volume $r\,d\varphi\,dr\,dz$ donne

$$\mu tr\,dV = \mu tr^2\,dr\,d\varphi\,dz$$

et son moment a pour valeur

$$m = \mu tr^3\,dr\,d\varphi\,dz.$$

La somme des moments, pour tous les éléments compris dans une petite couronne circulaire de hauteur dz, nous donne

$$m_1 = 2\pi\mu tr^3\,dr\,dz$$

et pour la couche entière du cylindre de hauteur dz

$$M = 2\pi\mu t\,dz\int_0^R r^3\,dr = \frac{\pi}{2}\mu t\,dz\,R^4,$$

R restant le rayon du cylindre. Le moment total pour le cylindre est alors

$$C = \frac{\pi}{2}\mu thR^4 = \mu tI,$$

I étant le moment d'inertie du cylindre par rapport à l'axe. C'est le couple qu'il faudra appliquer à l'extrémité du cylindre par exemple (et en sens inverse) pour obtenir la déformation indiquée.

182. Application aux fluides. Les équations de l'équilibre et du mouvement que nous avons trouvées précédemment s'appliquent sans modification à un fluide supposé *pourvu de viscosité*, de sorte que la pression en un point n'est plus indépendante de la direction du plan sur lequel elle s'exerce. Si nous désignons par c la densité du fluide, par $c\sigma\,dV$ la force directement appliquée à l'élément de volume dV, par ϖ_n la pression en un point sur un élément de surface dont la normale est n, et par ε la vitesse au point considéré, l'équation du mouvement du n° 175, devient ici

$$(1)\qquad c\frac{d\varepsilon}{dt} = c\sigma + \frac{\partial\varpi_x}{\partial x} + \frac{\partial\varpi_y}{\partial y} + \frac{\partial\varpi_z}{\partial z}$$

et l'équation des moments (n° 167)

$$(2)\qquad V\wedge(i\varpi_x + j\varpi_y + k\varpi_z) = 0$$

qui donne de la même manière

$$(3) \qquad \varpi_n n' = \varpi_{n'} n,$$

équation caractéristique d'un tenseur (*théorème de Cauchy*).

Mais si nous supposons que le liquide ou le fluide est *dénué de frottement* et si nous admettons dans ces conditions comme un fait d'expérience que la pression en un point est indépendante de l'orientation du plan sur lequel elle s'exerce, nous pourrons parler de la *pression en un point* et nous la désignerons par p en la rapportant à l'unité de surface. Cette pression est proportionnelle à la surface de l'élément qui lui est soumis et dirigée vers l'intérieur de la surface à laquelle appartient cet élément. C'est un vecteur.

Supposons d'abord le fluide en repos. On a $\varepsilon = 0$. D'autre part en supposant que la normale unité n est dirigée vers l'intérieur d'un volume découpé dans le fluide, on a

$$(a) \qquad \varpi_x = -ip, \qquad \varpi_y = -jp, \qquad \varpi_z = -kp$$

et par conséquent l'équation d'équilibre devient

$$(4) \qquad \sigma - \frac{1}{c}\nabla p = 0.$$

L'équation des moments est identiquement satisfaite, de sorte que les équations de l'équilibre hydrostatique se réduisent à la seule équation (4).

Si les forces appliquées admettent un potentiel (cas de la pesanteur), on a $\sigma = \nabla u$ et l'équation devient

$$dp - c\,du = 0.$$

Pour un fluide pesant, par exemple, l'axe des z étant supposé vertical et dirigé vers le haut, on a $u = gz$, d'où l'équation

$$p = p_0 - cgz.$$

183. Équations du mouvement. — Dans le cas d'un fluide en mouvement, nous aurons l'équation d'équilibre

$$(1) \qquad \frac{d\varepsilon}{dt} = \sigma - \frac{1}{c}\nabla p$$

et l'équation des moments est identique, en supposont encore un fluide sans frottement.

Si nous désignons par u, v, w les trois composantes de la vitesse

suivant les axes, et X, Y, Z celles de la force appliquée, l'équation (1) traduite en cartésien s'écrit

$$\frac{du}{dt} + u\frac{du}{dx} + v\frac{du}{dy} + w\frac{du}{dz} = X - \frac{1}{C}\frac{dp}{dx}$$

et deux autres analogues. Ce sont les équations d'Euler.

L'équation (1) ne suffit pas à déterminer le problème car elle équivaut à trois équations scalars, et nous avons quatre inconnues qui sont les composantes de la vitesse et la pression p. Il est donc nécessaire d'ajouter une équation scalar supplémentaire pour remplacer l'équation des moments. Cette condition supplémentaire s'exprime par une équation dite *équation de continuité*, et qui exprime le changement de masse ou de densité qui se produit en un point déterminé. Pour le volume dV, il est donné pendant le temps dt par $dV\frac{\partial c}{\partial t}dt$ et il doit être égal à la variation de la quantité de fluide contenue dans cet élément de volume, c'est-à-dire à la différence entre le fluide qui entre et celui qui sort du volume dV. Celle-ci est donnée par

$$\int_S c\varepsilon n\, dS = \int_V \operatorname{div} c\varepsilon\, dV.$$

On a donc l'équation

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \operatorname{div} c\varepsilon = 0. \tag{2}$$

Cette équation prend une autre forme en introduisant la dérivée totale de c par rapport au temps au lieu de la dérivée partielle $\frac{\partial c}{\partial t}$. On a (n° 129)

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + (\varepsilon\nabla)c = \frac{\partial c}{\partial t} + \varepsilon\nabla c = \frac{\partial c}{\partial t} + \operatorname{div} c\varepsilon - c\operatorname{div}\varepsilon \quad [\text{n° } 127, (6)]$$

et, par suite, l'équation (2) devient

$$\frac{dc}{dt} + c\operatorname{div}\varepsilon = 0. \tag{3}$$

De même, en introduisant dans (1) la dérivée partielle $\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}$, on a par [n° 129, (6)],

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} - \frac{1}{2}\nabla\varepsilon^2 - V\varepsilon\operatorname{rot}\varepsilon = \sigma - \frac{1}{c}\nabla p. \tag{4}$$

On sait d'ailleurs [n° 132, (2)] qu'on a

$$\operatorname{rot}\varepsilon = 2\omega,$$

ω étant la vitesse angulaire instantanée de rotation du fluide regardé comme un solide tournant autour d'un axe instantané passant par l'origine et ε étant la vitesse d'un point du solide (ou du fluide). Si l'on a $\operatorname{rot}\varepsilon = 0$, il n'y a pas rotation et les particules du fluide ne tourbillonnent pas (n° 132). Ce fait a lieu en particulier lorsque ε est le gradient d'une certaine fonction scalar u, car on a $\operatorname{rot}\nabla u = 0$. On dit alors, d'après *Helmholtz*, qu'il existe un *potentiel des vitesses*.

Cherchons l'expression de $\frac{d\omega}{dt}$ dans l'hypothèse d'un fluide *incompressible*, c'est-à-dire $c = \text{const.}$ L'équation (4) devient alors

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} - V\varepsilon \operatorname{rot}\varepsilon - \sigma = \nabla\left(\frac{1}{c}p + \frac{1}{2}\varepsilon^2\right).$$

Opérons par rot. Le deuxième membre s'annule et il vient en remarquant que

$$\operatorname{rot}\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\varepsilon = 2\frac{\partial\omega}{\partial t},$$

$$2\frac{d\omega}{dt} - 2\operatorname{rot} V\varepsilon\omega = \operatorname{rot}\sigma.$$

Mais on a [n° 127, (3)],

$$\operatorname{rot} V\varepsilon\omega = \varepsilon \operatorname{div}\omega + (\varepsilon\nabla)\omega - (\omega\nabla)\varepsilon - \omega \operatorname{div}\varepsilon.$$

Le fluide étant incompressible, on a $\operatorname{div}\varepsilon = 0$ [par (3)]. D'autre part,

$$\operatorname{div}\omega = \frac{1}{2}\operatorname{div}\operatorname{rot}\varepsilon = 0.$$

L'équation devient donc

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} - (\varepsilon\nabla)\omega + (\omega\nabla)\varepsilon = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\sigma.$$

La somme des deux premiers termes est égale à $\frac{d\omega}{dt}$. D'où

$$(5)\qquad \frac{d\omega}{dt} = -(\omega\nabla)\varepsilon + \frac{1}{2}\operatorname{rot}\sigma.$$

Si les forces directement appliquées admettent un potentiel, on a

$$\operatorname{rot}\sigma = 0$$

et l'équation se réduit à la suivante :

$$(6)\qquad \frac{d\omega}{dt} = -(\omega\nabla)\varepsilon.$$

On voit que si à un moment donné on a $\omega = 0$, ω reste nul puisque $\frac{d\omega}{dt} = 0$. On en déduit le

Théorème d'Helmholtz. — Dans un liquide sans frottement soumis à des forces naturelles, une molécule qui n'a pas de mouvement tourbillonnaire au début du mouvement n'en acquiert pas. Au contraire, une molécule tourbillonnante ne perd jamais son caractère tourbillonnaire.

184. **Mouvement stationnaire.** — Lorsque la *vitesse en un point d'un fluide* a une *valeur constante* (comme module) et une *direction indépendante* du temps on dit que le mouvement est *stationnaire*. On a alors $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = 0$.

Dans ce cas, il y a évidemment un potentiel des vitesses car $\operatorname{rot} \varepsilon = 0$ et si les forces appliquées sont les forces naturelles elles admettent un potentiel V de sorte que l'équation (4) s'écrit

$$\frac{v^2}{2} + V + \frac{p}{c} = \text{const.},$$

v étant le module de la vitesse.

Si la force agissante se réduit à la pesanteur, on a $V = gz$ et alors

$$\frac{v^2}{2g} + z + \frac{p}{gc} = \text{const.},$$

ce qui est une forme du *théorème de Bernoulli.*

185. **Exercices.** — I. En appelant *cisaillement simple* une déformation dans laquelle le déplacement d'un point est parallèle à un vecteur donné et proportionnel à la distance du point à un plan donné $(\alpha\beta)$, former la dyadique qui exprime ce cisaillement quand on l'emploie comme *préfacteur* [1] (Gibbs, *V. A.*, n° 156). On trouve

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + c\beta\gamma' \quad \text{ou} \quad 1 + c\beta\gamma' \quad (\textit{cf.}\ \text{n° } 109).$$

II. En appelant *cisaillement complexe* une déformation dans laquelle le mouvement parallèle à α est proportionnel à la distance du point au plan $(\alpha\gamma)$ et le mouvement parallèle à $b\beta + c\alpha$ est pro-

---

[1] Gibbs distingue le cas où la dyadique φ est employée comme *préfacteur* (c'est-à-dire dans le produit $\varphi\rho$) du cas où elle est employée comme *postfacteur* ($\rho\varphi$).

portionnel à la distance du point au plan $(\alpha\beta)$, trouver la dyadique qui exprime cette déformation quand on l'emploie comme préfacteur (Gibbs, *V. A.*, n° 157).

On trouve

$$1 + b(\alpha\beta' + \beta\gamma') + c\alpha\gamma'.$$

III. *Équilibre du parallélipipède élémentaire.* — On retrouve très facilement les équations (2) et (3) du n° 167 en cherchant les conditions d'équilibre du parallélipipède élémentaire. Considérons un point M par lequel nous faisons passer trois axes rectangulaires i, j, k.

La tension sur la face PQRS est alors

$$\left(P_i + \frac{1}{2}\, a\, \frac{\partial P_i}{\partial x}\right) bc.$$

La tension sur la face P′Q′R′S′ est

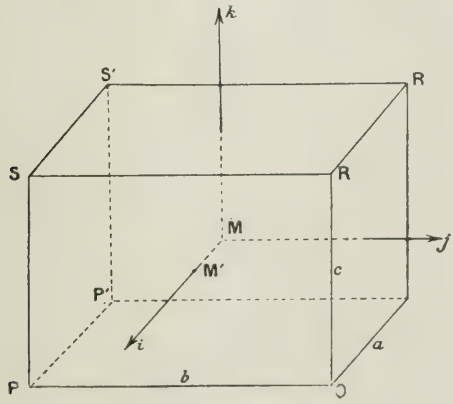
$$-\left(P_i - \frac{1}{2}\, a\, \frac{\partial P_i}{\partial x}\right) bc,$$

et la somme pour les deux faces

$$abc\, \frac{\partial P_i}{\partial x} = \frac{\partial P_i}{\partial x}\, dV.$$

En opérant de même pour les deux autres paires de faces, on voit

Fig. 66.



que la somme des tensions sur les deux faces est

$$\left(\frac{\partial P_i}{\partial x} + \frac{\partial P_j}{\partial y} + \frac{\partial P_k}{\partial z}\right) dV$$

En ajoutant la force extérieure $q\varpi\, dV$, on a donc la première équation d'équilibre

$$q\varpi - \frac{\partial P_i}{\partial x} + \frac{\partial P_j}{\partial y} + \frac{\partial P_k}{\partial z} = 0.$$

(Le signe est changé parce que nous avons pris ici les normales *extérieures*.)

Appliquons maintenant l'équation des moments. Le moment de la force appliqué au point M′ est par rapport au point M

$$V\frac{1}{2}ai\left(P_i - \frac{1}{2}\frac{\partial P_i}{\partial x}\right)bc$$

et pour l'autre face

$$V\frac{1}{2}ai\left(P_i - \frac{1}{2}\frac{\partial P_i}{\partial x}\right)bc$$

dont la somme est

$$V\, i P_i\, dV.$$

On a donc pour le moment total

$$V(iP_i + jP_j + kP_k)\, dV = 0;$$

d'où l'équation

$$V(iP_i + jP_j + kP_k) = 0.$$

Nous avons préféré établir ces équations au moyen du tétraèdre, bien que le procédé soit un peu moins simple, parce qu'on ne peut pas en général décomposer un corps en parallélipipèdes infiniment petits tandis qu'on peut toujours le décomposer en tétraèdres sans changer l'orientation des éléments infiniment petits de la *surface extérieure*, ce qui est ici indispensable.

CHAPITRE XVI.

APPLICATION A LA THÉORIE ÉLECTROMAGNÉTIQUE DE LA LUMIÈRE.

Nous donnerons dans ce Chapitre une application de la méthode aux plus simples éléments de la théorie électromagnétique de la lumière, basée sur les équations de Maxwell. Nous indiquerons ci-dessous la signification des quantités qui y entrent.

186. Considérons un champ électrique homogène et désignons par $\mathcal{E}$ l'intensité de ce champ, c'est-à-dire la densité des lignes de forces en un point, ou encore la grandeur de la force exercée en ce point sur l'unité de masse positive. Supposons que nous introduisions dans le champ un isolant, l'expérience montre que si nous désignons par $\mathfrak{D}$ l'intensité du champ dans l'isolant, on a la relation

$$\mathfrak{D} = k\mathcal{E},$$

k étant un coefficient de proportionnalité appelé *constante diélectrique* de l'isolant. Cette constante est égale à l'unité pour le vide. Pour tout autre corps elle est plus grande que l'unité.

La grandeur $\mathfrak{D}$ s'appelle la *polarisation diélectrique*. Soit de même un champ magnétique d'intensité $\mathcal{H}$ homogène. Si nous introduisons dans ce champ un corps quelconque, la densité des lignes de force dans ce corps devient $\mathfrak{B}$, et l'on a la relation

$$\mathfrak{B} = \mu\mathcal{H}.$$

Mais dans ce cas μ est un coefficient qui dépend de l'intensité du champ et qui peut être plus petit que l'unité. $\mathfrak{B}$ s'appelle l'*induction magnétique* et μ la constante magnétique d'induction ou le *coefficient de perméabilité magnétique*. Ce coefficient n'est d'ailleurs constant que si le champ est lui-même d'intensité constante.

Ceci posé, désignons par V la vitesse de la lumière, les équations de Maxwell s'écrivent

$$(1) \qquad \frac{k}{V}\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \operatorname{curl}\mathcal{H} = \operatorname{rot}\mathcal{H},$$

$$(2) \qquad \frac{\mu}{V}\frac{d\mathcal{H}}{dt} = -\operatorname{rot}\mathcal{E},$$

rot indiquant la fonction d'espace ordinaire dépendant uniquement des coordonnées du point considéré.

187. On tire de ces équations, en différentiant par rapport au temps,

$$\frac{k}{V}\frac{\partial^2\mathcal{E}}{dt^2} = \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\mathcal{H} = \operatorname{rot}\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{V}{\mu}\operatorname{rot}^2\mathcal{E}$$

ou bien [n° 130, (1)]

$$\frac{\mu}{V}\frac{k}{V}\frac{d^2\mathcal{E}}{dt^2} = -\nabla\operatorname{div}\mathcal{E} - \nabla^2\mathcal{E},$$

mais on a par [n° 186, (1)]

$$\frac{k}{V}\frac{d}{dt}\operatorname{div}\mathcal{E} = \operatorname{div}\operatorname{rot}\mathcal{H} = 0,$$

ce qui montre que div $\mathcal{E}$ est constant par rapport au temps. Si donc on considère un isolant qui n'est pas électrisé à l'origine, div $\mathcal{E}$ reste nul et l'on a simplement

$$(3) \qquad \frac{K\mu}{V^2}\frac{\partial^2\mathcal{E}}{dt^2} = -\nabla^2\mathcal{E},$$

un calcul analogue nous donnerait l'équation

$$(4) \qquad \frac{K\mu}{V^2}\frac{\partial^2\mathcal{H}}{dt^2} = -\nabla^2\mathcal{H}.$$

188. **Propagation par ondes planes.** Nous supposons dans ce qui suit que nous avons un état électrique tel qu'il soit le même pour tous les points d'un plan à chaque instant, c'est-à-dire qu'il varie de la même manière pour tous les points d'un plan. Ce cas correspond pratiquement à celui où l'on considère ce qui passe dans une portion déterminée d'un plan perpendiculaire à la direction de la propagation et assez éloigné de la position de la source de vibration pour qu'on puisse y confondre la petite portion de surface sphérique où l'onde

arrive après un temps t avec son plan tangent au point considéré sur la direction du rayon. Prenons ce plan pour plan des yz. Nous aurons

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial y} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} = 0$$

et, par suite,

$$\operatorname{rot} \mathcal{E} = \mathrm{V}\, i \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x}.$$

L'équation [n° 186, (2)] montre donc alors que $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}$ est perpendiculaire à i et que, par suite, le *mouvement magnétique*, en appelant ainsi le mouvement de l'extrémité du vecteur de champ magnétique est perpendiculaire à i et, par suite, à la direction de la propagation des ondes planes considérées.

On aura de même

$$\operatorname{rot} \mathcal{H} = \mathrm{V}\, i \frac{\partial \mathcal{H}}{dx}$$

et, par suite, par (1) on voit que $\frac{d\mathcal{E}}{dt}$ est perpendiculaire à i. Il résulte donc de là que les deux mouvements, électrique et magnétique, sont perpendiculaires à la direction de propagation de l'onde et *ont lieu dans le plan de l'onde.*

Prenons comme axe des y la direction suivant laquelle se produit le mouvement électrique dans le plan de l'onde. D'après nos hypothèses, nous pourrons poser

$$\mathcal{E} = j\varphi(x, t),$$

φ étant une certaine fonction scalar. On a alors

$$\operatorname{rot} \mathcal{E} = \mathrm{V}\, ij \frac{\partial \varphi}{dt} = k \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

ce qui montre par [n° 186, (2)] que $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}$ est perpendiculaire à $\mathcal{E}$.

On obtient donc ce résultat important que dans un mouvement par ondes planes tel que celui dont il s'agit, tout mouvement électrique est accompagné d'un mouvement magnétique qui lui est perpendiculaire, ces deux mouvements étant d'ailleurs situés dans le plan de l'onde, c'est-à-dire perpendiculaires à la direction de propagation des ondes.

D'après ce qui précède les équations (3) et (4) se réduisent aux

suivantes :

$$\frac{K\mu}{V^2}\frac{\partial^2 Y}{dt^2} = \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2},$$

$$\frac{K\mu}{V^2}\frac{\partial^2 Z_1}{\partial t^2} = \frac{d^2 Z_1}{\partial x^2},$$

en appelant X, Y, Z les composantes de la force électrique et X_1, Y_1, Z_1 celles de la force magnétique. En effet, $X = Z = X_1 = Y_1 = 0$. D'ailleurs $\mathcal{E}$ et $\mathcal{H}$ ne dépendent que de x et, par suite, les dérivées secondes par rapport à y et z sont nulles. Ces equations sont d'un type bien connu et l'on peut y satisfaire en posant

$$Y = \varphi(x - at) \quad \text{ou} \quad \mathcal{E} = j\varphi(x - at),$$
$$Z_1 = \psi(x - at) \quad \text{ou} \quad \mathcal{H} = k\psi(x - at);$$

a étant une quantité à déterminer, on en déduit

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -aj\varphi', \qquad \operatorname{rot}\mathcal{E} = k\varphi',$$

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = -ak\psi', \qquad \operatorname{rot}\mathcal{H} = -j\psi'.$$

D'où les équations (1) et (2)

$$\frac{K}{V}a\varphi' = \psi', \qquad \frac{\mu}{V}a\psi' = \varphi'$$

et, par multiplication,

$$\frac{k\mu a^2}{V^2} = 1$$

ou

$$a = \frac{V}{\sqrt{k\mu}},$$

Mais a n'est autre chose que la *vitesse* avec laquelle l'état électrique se propage le long de l'axe des x. Pour le vide, on a

$$K = \mu = 1,$$

d'où

$$a = V.$$

Il suit de là que dans le vide, la vitesse de propagation des ondes électriques est la même que la vitesse de la lumière.

Les ondes électromagnétiques sont donc des ondes *transversales*, *l'onde électrique est perpendiculaire à l'onde magnétique*, et toutes deux sont perpendiculaires à la direction de propagation de l'onde qui se propage avec la vitesse de la lumière (dans le vide).

189. Mouvements intérieurs dans un milieu isotrope. — Les résultats qui précèdent sont en concordance avec la théorie de la propagation d'un ébranlement dans un milieu isotrope déduite des équations que nous avons établies au Chapitre précédent pour le mouvement dans un tel milieu. Nous avons trouvé pour équation indéfinie du mouvement dans ce milieu (n° 176), l'équation suivante :

$$(\lambda + \mu)\nabla\theta - \mu\nabla^2\sigma + q\varpi = q\frac{\partial^2\sigma}{dt^2}.$$

Si nous considérons comme négligeables les forces extérieures, cette équation s'écrit

$$(1) \qquad (\lambda + \mu)\nabla\theta - \mu\nabla^2\sigma = q\frac{\partial^2\sigma}{dt^2}.$$

Or, *un vecteur de champ peut toujours se décomposer en une partie solénoïdale* (ou tourbillonnaire) *et une partie non tourbillonnaire*. Pour le démontrer, posons avec *Stokes*, σ étant un vecteur de champ,

$$(2) \qquad \sigma = \alpha + \beta,$$

et essayons de satisfaire à cette équation au moyen de deux vecteurs α et β satisfaisant aux conditions

$$(3) \qquad \left\{\begin{array}{l} \operatorname{div}\alpha = 0, \\ \operatorname{rot}\beta = 0. \end{array}\right.$$

Pour cela nous remarquons que les conditions (3) seront identiquement satisfaites si nous posons

$$\alpha = \operatorname{rot}\gamma,$$
$$\beta = \nabla u,$$

et il s'agit de déterminer γ et u de manière à satisfaire à l'équation (2), c'est-à-dire de manière qu'on ait identiquement dans tout le champ

$$(4) \qquad \sigma = \nabla u + \operatorname{rot}\gamma.$$

Soit ω le tourbillon de σ et θ sa divergence. On aura donc

$$\omega = \operatorname{rot}\sigma = \operatorname{rot}^2\gamma.$$

Or, nous savons (n° 147) que cette équation comporte une infinité

de solutions pour γ et que nous avons la solution particulière

$$\gamma = -\frac{1}{4\pi}\int\frac{w\,dV}{r} \qquad \text{avec} \qquad \operatorname{div}\gamma = 0,$$

l'intégrale se rapportant à tout le champ. Les autres valeurs en nombre infini de γ ne diffèrent de cette solution particulière que par un terme de la forme ∇t où t est une fonction scalar.

On aura de même

$$\theta = \operatorname{div}\sigma = \operatorname{div}\nabla u = -\nabla^2 u,$$

équation qui admet comme solution (n° **146**),

$$u = -\int\frac{\theta\,dV}{r}.$$

La décomposition annoncée est donc ainsi obtenue.

On peut alors considérer deux cas particuliers de propagation des ondes, celui dans lequel on a toujours

$$w = 0.$$

Il n'y a pas de rotation et la dilatation cubique θ (n° **173**) est seule variable; et celui où l'on a, au contraire,

$$\theta = 0.$$

la dilatation cubique étant toujours nulle. Les ondes qui correspondent au premier cas s'appellent *ondes de condensation*, celles qui correspondent au second, *ondes de distorsion* [1].

Examinons d'abord le premier cas. On a alors

$$\sigma = \nabla u.$$

Portons cette valeur de σ dans l'équation (1) du mouvement, il vient

$$(\lambda + \mu)\nabla\operatorname{div}\nabla u - \mu\nabla^2\nabla u = q\frac{d^2\nabla u}{dt^2},$$

mais on a [n° **134**, (XII)]

$$\nabla^2\nabla u = \nabla\nabla^2 u = -\nabla\operatorname{div}\nabla u.$$

D'autre part,

$$\frac{\partial^2\nabla u}{dt^2} = \nabla\frac{d^2 u}{dt^2}.$$

---

[1] Bouasse, *Traité de Mécanique physique*, Paris, Delagrave, p. 77 et suiv.

L'équation devient donc

$$-\nabla(\lambda+2\mu)\nabla^2 u = q\nabla\frac{d^2 u}{dt^2}$$

ou bien

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = -a^2\nabla^2 u, \tag{5}$$

en posant

$$a^2 = \frac{\lambda+2\mu}{q}.$$

L'équation (5) est celle à laquelle doit satisfaire la fonction u. Celle-ci étant connue on obtiendra σ par dérivation au moyen de ∇.

Considérons maintenant le second cas, c'est-à-dire

$$\theta = 0,$$

on a alors

$$\sigma = \operatorname{rot}\gamma.$$

Substituons σ dans l'équation (1), il vient

$$-\mu\nabla^2\operatorname{rot}\gamma = q\frac{\partial^2\operatorname{rot}\gamma}{\partial t^2},$$

mais on a [n° 134, (XIII)],

$$-\nabla^2\operatorname{rot}\gamma = \operatorname{rot}\nabla^2\gamma.$$

Par suite, on a l'équation à laquelle doit satisfaire γ,

$$\frac{d^2\gamma}{\partial t^2} = b^2\nabla^2\gamma,$$

en posant

$$b^2 = \frac{\mu}{q},$$

γ étant connu, on aura le déplacement par l'expression

$$\sigma = \operatorname{rot}\gamma.$$

Or nous allons montrer maintenant que ces deux espèces particulières d'ondes sont les seules qui puissent se propager dans un milieu isotrope lorsque le mouvement de propagation a lieu par ondes planes.

190. Ondes planes. — On appelle *mouvement par ondes planes*

un mouvement défini par une équation de la forme

$$(1) \qquad \sigma = r_1 \cos(st + \gamma\rho - \varphi)\,(^1),$$

on voit que ce mouvement est *rectiligne*.

Soit c le module du vecteur γ. Si ρ est un point situé dans un plan à la distance d de l'origine, on a

$$\gamma\rho = -cd,$$

et l'équation devient

$$(2) \qquad \sigma = r_1 \cos(st - cd - \varphi).$$

On voit que tous les points situés à la même distance du plan

$$(\mathrm{P}) \qquad \gamma\rho = 0$$

ont même déplacement au même instant. C'est ce qu'on exprime en disant que le mouvement a lieu *par ondes planes*.

Le mouvement défini par (1) est *périodique*, mais de plus à un instant déterminé, σ est le même pour toutes les valeurs de d qui diffèrent entre elles d'une valeur l telle que

$$cl = \text{multiple de } 2\pi$$

ou d'un multiple de la longueur

$$(3) \qquad l = \frac{2\pi}{c}.$$

Cette valeur l s'appelle *longueur d'onde*. *A un instant donné* tous les points situés sur une même normale au plan (P) et dont la distance est un multiple de la longueur d'onde, ont même déplacement.

En un point donné, les valeurs de σ redeviennent les mêmes lorsque t s'accroît d'une quantité τ telle que $s\tau = 2\pi$. La quantité

$$(4) \qquad \tau = \frac{2\pi}{s}$$

s'appelle *durée de la vibration* ou simplement *période*.

Remarquons de plus que si nous avons entre Δt et Δd la relation

$$s\,\Delta t - c\,\Delta d = 0,$$

les valeurs de σ restent les mêmes, on en tire

$$\frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{s}{c}.$$

---

(1) t désigne le temps, $\gamma\rho$ est mis pour $S\gamma\rho$ et φ est un angle, s est un scalar.

cette quantité

$$\omega = \frac{s}{c} = \frac{l}{\tau} \tag{5}$$

s'appelle *vitesse de propagation de l'onde.*

Avec ces notations on peut écrire, d étant la distance du plan d'onde à l'origine,

$$\sigma = \eta \cos\left[2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{d}{l}\right) - \varphi\right].$$

191. Ceci posé, substituons le mouvement (1) dans l'équation [n° 181, (1)]. Nous avons à calculer

$$\nabla\theta, \quad \nabla^2\sigma \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2\sigma}{dt^2}.$$

Posons pour faciliter le calcul

$$\sigma = \eta\cos\psi \quad \text{avec} \quad \psi = st + \gamma\rho - \varphi \quad \text{d'où} \quad \nabla\psi = -\gamma.$$

Nous aurons

$$\theta = \operatorname{div}\sigma = \operatorname{div}(\eta\cos\psi) = -S\eta\nabla\cos\psi = -S\eta\gamma\sin\psi,$$
$$\nabla\theta = -S\eta\gamma\nabla\sin\psi = \gamma S\eta\gamma\cos\psi,$$

on a ensuite

$$\nabla^2\sigma = \operatorname{rot}^2\sigma - \nabla\operatorname{div}\sigma = \operatorname{rot}^2\sigma - \nabla\theta$$

et

$$\operatorname{rot}\sigma = \operatorname{rot}(\eta\cos\psi) = -V\eta\nabla\cos\psi = -V\eta\gamma\sin\psi,$$
$$\operatorname{rot}^2\sigma = VV\eta\gamma\nabla\sin\psi = -\cos\psi V\gamma V\gamma\eta;$$

on en déduit l'équation

$$\nabla^2\sigma = -\eta\gamma^2\cos\psi,$$

on a donc l'équation obtenue en substituant dans [n° 189, (1)],

$$(\lambda + \mu)\gamma S\eta\gamma + \mu\eta\gamma^2 = -qs^2\eta. \tag{1}$$

Opérons par $S\gamma$ et remplaçons γ^2 par $-c^2$, il vient

$$S\eta\gamma[(\lambda + 2\mu)c^2 - qs^2] = 0.$$

On peut donc satisfaire à l'équation de deux façons ou bien en posant

$$(\lambda + 2\mu)c^2 = qs^2 \tag{α}$$

ou bien

$$S\eta\gamma = 0. \tag{β}$$

Premier cas. — *Ondes de condensation.* — Dans le premier cas, c'est-à-dire celui de l'équation (α), on a

$$\omega_1 = \frac{s}{c} \quad \text{ou} \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{q}},$$

pour la *vitesse de propagation* des ondes.

Opérons sur (1) par $V\eta_1$ nous obtenons, puisque $S\eta\gamma \neq 0$,

$$V\eta_1\gamma = 0.$$

La vibration est donc *perpendiculaire au plan de l'onde*. On dit que les ondes sont longitudinales. Il en résulte que

$$\operatorname{rot}\sigma = 0.$$

Les ondes sont donc des ondes de condensation se propageant avec la vitesse

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{q}}.$$

Second cas. — *Ondes de distorsion.* — Dans le second cas (β), l'équation

$$S\eta_1\gamma = 0$$

ou

$$S\gamma\sigma = 0.$$

exprime que la vibration s'effectue dans le plan de l'onde, on a alors

$$\theta = 0.$$

Par conséquent, les ondes sont des *ondes de distorsion*. On les appelle *ondes transversales*. Dans ce cas, l'équation (1) se réduit à

$$\mu c^2 = qs^2.$$

et la *vitesse de propagation* est

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{\mu}{q}}.$$

192. Vibrations harmoniques. — Les résultats qui précèdent montrent que les seuls mouvements par ondes planes qui puissent se propager dans un milieu isotrope sont des ondes de condensation ou de distorsion et que le mouvement est alors toujours rectiligne. Le mouvement dans le cas des ondes de condensation a une direction déterminée qui est celle de la propagation. On dit qu'il est *polarisé*, mais le mouvement dans le cas des ondes de distorsion peut avoir une

direction quelconque dans le plan de l'onde, car il n'est assujetti qu'à une seule condition, c'est d'être perpendiculaire à la direction de la propagation de l'onde.

Toutefois les équations de Maxwell nous ont fourni deux mouvements polarisés situés dans le plan de l'onde, et perpendiculaires entre eux, l'un parallèle à la force électrique, l'autre à la force magnétique. On peut concevoir deux théories des ondes lumineuses transversales; dans la première, on attribuera les phénomènes optiques au mouvement électrique, et c'est à cela que revient l'hypothèse de Fresnel.

Dans la seconde, au contraire, on attribuera les phénomènes optiques au mouvement magnétique qui a lieu dans un plan perpendiculaire au premier. C'est la théorie de Neumann. On penche plutôt maintenant d'une manière générale pour la première hypothèse.

Quoi qu'il en soit, désignons actuellement par E la force électrique et par M la force magnétique d'une onde plane satisfaisant aux équations de Maxwell. Puisque nous avons pris comme axe de y et de z respectivement les directions de ces forces, nous avons

$$(1) \qquad \mathcal{E} = j\mathrm{E}, \qquad \mathcal{H} = k\mathrm{M},$$

et les équations (1) et (2) (n° 186) et (3) et (4) prennent la forme

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{K}}{\mathrm{V}}\dfrac{\partial \mathrm{E}}{dt} = -\dfrac{\partial \mathrm{M}}{\partial x}, \\[2ex] \dfrac{\mathrm{K}\mu}{\mathrm{V}^2}\dfrac{\partial^2 \mathrm{E}}{dt^2} = \dfrac{\partial^2 \mathrm{E}}{\partial x^2}; \end{cases}$$

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{\mu}{\mathrm{V}}\dfrac{\partial \mathrm{M}}{\partial t} = -\dfrac{\partial \mathrm{E}}{\partial x}, \\[2ex] \dfrac{\mathrm{K}\mu}{\mathrm{V}^2}\dfrac{\partial^2 \mathrm{M}}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 \mathrm{M}}{\partial x^2} \end{cases}$$

On satisfait à l'équation en E en prenant

$$\mathrm{E} = \mathrm{E}_0 \cos 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{l}\right)$$

où l'on a

$$\frac{l}{\tau} = a = \sqrt{\frac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{K}\mu}} = \text{vitesse de propagation.}$$

On a ainsi en un point déterminé de l'espace une force électromotrice qui est une *fonction harmonique du temps*. Nous avons ce qu'on appelle une *vibration électrique*.

Les équations (2) et (3) montrent une correspondance intime entre les ondes électriques et les ondes magnétiques. Formons

$$\frac{\partial E}{dt} = -\frac{2\pi}{\tau} E_0 \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{l}\right),$$

il suit alors, de la première équation (2),

$$-\frac{\partial M}{\partial x} = -\frac{K}{V}\frac{2\pi}{\tau} E_0 \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{l}\right),$$

d'où, par intégration,

$$M = \frac{K}{V}\frac{l}{\tau} E_0 \cos 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{l}\right),$$

la constante d'intégration étant nulle si, comme nous l'admettons, il n'existait à l'origine aucune force magnétique.

Nous pouvons poser

$$\frac{K}{V}\frac{l}{\tau} E_0 = M_0,$$

M_0 étant la demi-amplitude de la vibration magnétique et nous voyons alors qu'il existe une onde magnétique tout à fait analogue à l'onde électrique. La vibration magnétique est perpendiculaire à la vibration électrique et elle a *même phase et même période*.

La vitesse de propagation et la longueur d'onde sont les mêmes ainsi que d'ailleurs cela doit être puisque les deux vibrations se transportent dans une même onde plane avec une vitesse commune.

193. **Double réfraction.** — La théorie élémentaire de la double réfraction, à laquelle nous allons appliquer les considérations qui précédent, va nous offrir un exemple de la manière dont les fonctions linéaires s'introduisent en physique toutes les fois qu'il s'agit d'un milieu ne possédant pas les mêmes propriétés dans toutes les directions, nous en avons déjà rencontré un exemple dans le Chapitre précédent où nous considérons la déformation d'un milieu. Le milieu était bien supposé isotrope, mais la déformation n'étant pas la même dans toutes les directions, de sorte que les fonctions linéaires s'y introduisaient très naturellement. Le même fait va se présenter dans la question actuelle où nous supposons un milieu non isotrope.

Dans un corps non isotrope, la constante diélectrique n'est pas la même dans toutes les directions. Si nous nous bornons, par exemple, au cas des cristaux à un axe, ceux-ci ont la propriété que dans une

certaine direction la constante diélectrique a une valeur déterminée K_0 et dans toute autre direction perpendiculaire une autre valeur K_1. Nous prendrons la constante magnétique égale à l'unité comme c'est le cas pour les cristaux transparents. Nous placerons l'axe des x dans la direction qui a K_0 pour constante diélectrique et si nous posons

$$E = iX + jY + kZ,$$

nous aurons

$$\mathcal{E} = K_0 iX + K_1(jY + kZ) = \varphi E$$

en posant

$$\varphi = K_0 ii + K_1(jj + kk). \tag{1}$$

La première équation de Maxwell devient donc

$$\frac{1}{V}\frac{\partial \varphi E}{\partial t} = \operatorname{rot} \mathcal{H},$$

et la deuxième équation de Maxwell est

$$\frac{1}{V}\frac{\partial \mathcal{H}}{dt} = -\operatorname{rot} E;$$

nous avons d'ailleurs [1]

$$E = E_0 \cos\delta \qquad \text{en posant} \qquad \delta = \frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{d}{a}\right),$$

d étant la distance de l'onde à l'origine; d'où

$$\frac{\partial \varphi E}{dt} = \varphi \frac{\partial E}{dt} = -\frac{2\pi}{\tau}\sin\delta\, \varphi E_0;$$

on a, d'autre part,

$$\operatorname{rot} \mathcal{H} = \operatorname{rot}(M_0 \cos\delta) = -\frac{2\pi}{a\tau}\sin\delta\, V M_0 \rho_0,$$

en appliquant la formule qui donne $\operatorname{rot} m\sigma$ [127, (7)], ρ_0 étant le vecteur unité dirigé suivant la ligne de propagation, on en déduit l'équation

$$\frac{a}{V}\varphi E_0 = V M_0 \rho_0. \tag{2}$$

Opérons sur cette équation par SM_0 et $S\rho_0$, nous avons

$$SM_0 \varphi E_0 = 0,$$
$$S\rho\varphi E_0 = 0.$$

---

[1] E est ici une élongation vectorielle et non plus scalaire. De même E_0 est un vecteur.

Soient X_0, Y_0, Z_0 les composantes de E_0 et α_0, β_0, γ_0 celles de M_0, ces équations s'écrivent

$$(a) \qquad K_0 X_0 \alpha_0 + K_1 (Y_0 \beta_0 + Z_0 \gamma_0) = 0$$

et

$$(b) \qquad K_0 X_0 x + K_1 (Y_0 y + Z_0 z) = 0.$$

La première équation où K_0 et K_1 dépendent de la nature du cristal, tandis que les X et les α ne dépendent que de la nature de la lumière, ne peut subsister que si l'on a séparément

$$X_0 \alpha_0 = 0, \qquad Y_0 \beta_0 + Z_0 \gamma_0 = 0.$$

La première de ces deux équations nous donne, soit

$$X_0 = 0,$$

soit

$$\alpha_0 = 0.$$

Si $X_0 = 0$, les vibrations électriques sont perpendiculaires à l'axe des x, c'est-à-dire à la direction suivant laquelle la constante diélectrique est K_0. Mais elles sont aussi perpendiculaires à la direction de propagation. Elles sont donc perpendiculaires au plan déterminé par l'axe des x et par la direction de propagation. On désigne ce plan sous le nom de *section principale* du cristal. Dans ce cas, les vibrations magnétiques ont lieu dans le plan de la section principale puisqu'elles sont perpendiculaires aux vibrations électriques.

Si $\alpha_0 = 0$, les vibrations magnétiques sont perpendiculaires à la section principale et les vibrations électriques sont dans ce plan. Nous obtenons ainsi ce résultat important, que dans les cristaux considérés les *vibrations électriques et magnétiques ne peuvent être que parallèles ou perpendiculaires à la section principale.*

Soient maintenant λ, μ, ν les angles que fait la direction de propagation avec les axes. L'équation (b) s'écrit

$$(3) \qquad K_0 X_0 \cos\lambda + K_1 (Y_0 \cos\mu + Z_0 \cos\nu) = 0.$$

194. Considérons d'abord l'hypothèse $\alpha_0 = 0$, on tire de l'équation (2)

$$E_0 = \frac{V}{a} \varphi^{-1} V M_0 \rho_0.$$

Portons cette valeur dans la deuxième équation de Maxwell, il

vient

$$\frac{a^2}{V^2} M_0 = V \rho_0 \varphi^{-1} V M_0 \rho_0,$$

mais on a [109, (5)]

$$\varphi^{-1} = \frac{ii}{K_0} + \frac{jj + kk}{K_1}.$$

Remplaçons M_0 par sa valeur $\beta_0 j + \gamma_0 k$ et ρ_0 par

$$i \cos\lambda + j \cos\mu + k \cos\nu,$$

nous obtenons, en égalant de part et d'autre les coefficients de j, par exemple,

$$\frac{a^2}{V^2} \beta_0 = -\frac{\cos\nu}{K_0} S i M_0 \rho_0 + \frac{\cos\lambda}{K_1} S k M_0 \rho_0.$$

Or, on a

$$S i M_0 \rho_0 = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_0 & \gamma_0 \\ \cos\lambda & \cos\mu & \cos\nu \end{vmatrix}, \qquad S k M_0 \rho_0 = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \beta_0 & \gamma_0 \\ \cos\lambda & \cos\mu & \cos\nu \end{vmatrix};$$

d'où l'équation

$$\frac{a^2}{V^2} = \frac{1}{K_0} (\cos^2\mu + \cos^2\nu) + \frac{1}{K_1} \cos^2\lambda,$$

ou bien, en tenant compte de la relation

$$\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1,$$

on a

$$a^2 = V^2 \left(\frac{\sin^2\lambda}{K_0} + \frac{\cos^2\lambda}{K_1} \right).$$

Si donc nous avons eu en un point quelconque du cristal une excitation électromagnétique, les vibrations électriques qui ont lieu parallèlement à la section principale se propagent avec des vitesses différentes suivant les différentes directions. Chacune des ondes élémentaires devient une surface de révolution dont l'axe est parallèle à l'axe des x et assez analogue à un ellipsoïde de révolution.

195. Considérons maintenant l'hypothèse $X_0 = 0$. Les vibrations électriques sont perpendiculaires à la section principale.

On a alors, par la deuxième équation de Maxwell,

$$\frac{a}{V} M_0 = V \rho_0 E_0 \text{ (1)}.$$

(1) En opérant sur cette équation par SE_0, on obtient $\alpha_0 X_0 + \beta_0 Y_0 + \gamma_0 Z_0$ et en comparant cette équation avec (a) on voit qu'on doit avoir $X_0 \alpha_0 = 0$, $\beta_0 Y_0 + \gamma_0 Z_0 = 0$, c'est-à-dire le résultat donné précédemment.

Portant cette valeur dans la première équation et remarquant que

$$\varphi E_0 = j Y_0 + k Z_0,$$

nous obtenons

$$\frac{V}{a}(j Y_0 + k Z_0) K_1 = -\frac{V}{a} V \rho_0 V \rho_0 E_0 = \frac{V}{a} E_0,$$

car $S \rho_0 E_0 = 0$

$$= \frac{V}{a}(j Y_0 + k Z_0);$$

d'où, en égalant les coefficients de j et k,

$$a^2 = \frac{V^2}{K_1};$$

c'est-à-dire que la lumière dont les vibrations électriques ont lieu perpendiculairement à la section principale se propage dans notre cristal comme dans un corps isotrope. Les ondes élémentaires de chaque surface d'onde sont sphériques.

Il suit de là que si un rayon lumineux tombe sur la surface d'un cristal à un axe, par exemple un Spath, il n'existera dans le cristal que des vibrations perpendiculaires et parallèles à la section principale. Nous devons donc décomposer les vibrations du rayon incident en deux composantes correspondantes. Celles-ci ont en général une vitesse de propagation différente et, par suite, des *indices de réfraction différents*. Il y a *double réfraction*. L'un des rayons, dont les surfaces d'ondes élémentaires sont des sphères, conserve le même indice, on l'appelle le *rayon ordinaire*. Ses vibrations électriques sont perpendiculaires à la section principale. L'indice de réfraction du second rayon dépend de la position du rayon incident dans la section principale. Nous l'appelons *rayon extraordinaire*. Ses vibrations électriques ont lieu parallèlement à la section principale. Ses ondes élémentaires forment des surfaces de révolution compliquées dont l'axe est parallèle à l'axe des x.

FIN

INDEX ALPHABÉTIQUE.

Les chiffres se rapportent aux numéros des articles.

A.

Absolu (Mouvement), 81.
Absolue (Définitions de ∇), 131.
Accélération relative, 81.
— absolue, 81.
— d'entraînement, 81.
— complémentaire, 81.
— angulaire, 165.
Acyclique (Espace), 142.
Addition des grandeurs complexes, 3.
— des vecteurs, 19.
— sphérique, 60.
Aires (Théorème des), 82, 162.
Alembert (D'), 161.
Angle d'un quaternion, 56.
— de torsion, 84.
— de contingence, 83.
— de contingence géodésique, 88.
Angles d'Euler, 79.
Antécédent d'une dyade, 98.
Antisymétrique (Fonction), 104.
Appell, 22.
Arc représentatif d'un quaternion, 60.
Associativité, 29.
— de la multiplication des quaternions, 62.
Asymptotiques (Lignes), 90.
Attraction d'une sphère, 157.
— des ellipsoïdes, 159.
— newtonienne, 155.
— (Calcul de l'), 157.
Autoconjuguée (Fonction), 104.
Ausdehnungslehre. Introduction, 2 et suivants.
Axe d'un bivecteur, 39, 49.
— central, 49.
— du plan osculateur, 83.
— du déplacement hélicoïdal du trièdre normal, 85.
Axes d'un quaternion, 56.
— d'une quadrique, 112.
— d'inertie, 160.
— (de rotation, Lieu des), 166.

B.

Ball (Coefficient de), 51, (XX).
Barycentre, 14.
— des sommets d'un triangle, 16.
— des sommets d'un tétraèdre, 16.
— du périmètre d'un triangle, 16.
Barycentrique (Calcul), 13 et suiv.
Barycentriques (Coordonnées) du point, 15, 42.
— de la droite, 42.
— du plan, 42.
Base du calcul des quaternions, 7.
Base de l'Ausdehnungslehre, 8.
Bernoulli, 184.
Binormale, 84.
Bipoint, 22.
Bipoints (Somme de), 41, (XIII),
Bivecteur, 39.
Bivecteurs (Somme de), 41, (XIII).
Bonnet (Ossian), 88, 96.
Bouasse, 167, 174, 189.
Burali-Forti, 9, 105, 125, 153.
Brianchon (Théorème de), 46.

C.

Calcul des quaternions, 7, 52 et suiv.
— barycentrique (*cf.* Barycentrique).
Cauchy, 160, 169, 182.
Cayley, 51, (VI).
Ceva (Théorème de), 25, (10).
Centre de gravité, 14.
— des moments, 50.
— instantané de rotation, 94.
— des accélérations, 94.
Central (Mouvement), 82.
— axe, 49.
Cercle osculateur, 83.
Champ infini, 136.
— de vitesses, 138.
— tourbillonnaire, 144, 147.
— vectoriel, 138.
— électrique, 186.
— potentiel, 145, 146.
— lamellaire, 145.
— linéaire, 47.
— ponctuel, 47.
Chasles, 49, 94.
Cinématique, 37, 48, 76 et suiv., 94.
Circulaires (Sections), 116.
Circulation d'un vecteur, 142.
— (Théorème de la), 143.
— d'un scalar, 144.
— (Variation de la), 149.
Cisaillement simple ou complexe, 185.
Cloisons, 142.
Clairaut (Th. de), 96.
Collinéarité, 15, 20.
Commutativité du produit, 40, 60.
— du signe d'avec S, V, K, 69.
Complément, 28.
— (Double), 28.
— dans le domaine du 4e degré, 32.
— du produit de deux unités, 29, 33.
— du prod. ext. de deux vecteurs, 39.
— d'un vecteur, 39.
Complexes (Grandeurs), Chap. I.
Composantes d'un vecteur, 21, 66, 72, (6).
Compression uniforme, 177.
Cône asymptote, 117.
Configuration de Maclaurin, 47.
Congruentes (Grandeurs), 2, 44.
Congruence de droites, 96.
Conjugué d'un quaternion, 58.
Conjugué d'un scalar, 58.
— d'un vecteur, 58.
— d'un produit, 60.
— harmonique, 25 (Exercices).
Conjuguée (Fonction), 97.
Conjuguées (Directions), 87.
Conjugués (Bipoints), 23.
Cône du 2e ordre, 47.
— circonscrit à la sphère, 75.
Connexion multiple, 142.
Conséquent d'une dyade, 98.
Constante diélectrique, 186, 193.
Contingence (Angle de), 83.
Continuité (Équation de), 183.
Contragradientes (Formules), 96.
Convergence d'une intégrale multiple, 136.
Coordonnées barycentriques (*cf.* Barycentrique).
— pluckériennes de la droite, 43.
— (radiales), 74.
— (axiales), 74.
Coplanaires (Grandeurs), 9-10 (Note).
— Points, 20.
— Vecteurs, 63.
Coriolis, 81.
Couche sphérique (Attraction d'une), 157.
— (Équilibre d'une), 179.
Cylindrique (Equilibre d'une couche), 180.
Couple de bipoints, 48.
— de rotations, 48.
— de forces, 48.
Coupures, 142.
Courbe du 2e ordre, 45.
— de 2e classe, 46.
Courbes gauches, 83 et suiv.
Courbure totale, 85.
— (Rayon de), 83.
— (Lignes de), 89.
Cristal biréfringent, 193.
Cubique fondamentale, 106.
— (Transformation de la), 112 (Rem.).
Curl, 126.
— (Calcul du), 127.
— (Définition absolue du), 131.
— (Interprétation du), 132.
— (Théorème du), 141.
Cyclique (Forme), 116.
— (Espace), 142.
Cylindrique (Equilibre d'une couche), 180.

D.

Darboux, 79.
Décomposition du vecteur du champ, 189.
— d'un vecteur suivant 3 directions, 21-66.
— d'un vecteur suivant 2 directions, 72, (6).
Débit, 132-146.
Déformation, 172.
— pure, 172.
— élémentaire, 172.
— angulaire, 172.
Degré d'une grandeur, 2.
— d'un domaine, 5.
Densité superficielle, 152-158.
— du feuillet, 159.
Dépendance numérique, 2.
Déplacement fini d'un solide, 76 et suiv.
— instantané, 80.
— infinitésimal du trièdre normal, 84.
— infinitésimal du trièdre caractéristique, 88.
— d'un système de points, 171.
— (Décomposition du), 172.
Dérivée (Absence de), 68.
— d'un scalar dans une direction, 129.
— d'un vecteur, 128.
— totale, 129.
Désargues (Théorème de), 25, (7).
Déterminant d'une dyadique, 103.
Déterminants (Multiplication des), 67, (IV).
Diamètres conjugués d'une quadrique, 112.
Diaphragme, 142.
Différence de deux points, 17.
Différentiation, 68 et suiv.
Différentielle (Définition par Hamilton de la), 72.
Différentielles usuelles, 70.
Dilatation linéaire, 172.
Dilatation principale, 172.
— cubique, 173.
Dilatations (Surface des), 172.
Directions principales, 106-112.
— conjuguées sur une surface, 87.
— conjuguées d'une quadrique, 112
Dirigées (Grandeurs) (*cf.* Introduction).
Discontinuités, 135, 136, 152.
Distance d'un point à une droite, 73.
— d'un point à un plan, 73.
— (Plus courte) de 2 droites, 73.
Divergence, 105, 126, 152.
— (Calcul de la), 127.
— de $\varphi\varphi$, 134.
— définition absolue, 131.
— interprétation, 132.
— (Théorème de la), 139.
Division par un scalar, 4.
— des vecteurs, 55.
Domaine, 5.
— de degré n, 5.
— de degré nul, 5.
— du 3e degré, 38 et suiv.
— du 4e degré, 31 et suiv.
Double produit vectoriel, 41, (XIV), 64.
— (Règle du), 41, (III).
Droite (Équation vectorielle), 21, 73.
— rectifiante, 85.
— à l'infini, 26.
— nulle, 51, (XIII).
Dupin, 87.
Dyade, dyadique, 98, 99.
Dyadique conjuguée, 99.
— inverse, 100.
— homologues, 102.
— autoconjuguée, 104.
— (Forme normale de la), 108.
— (Produit de la), 101.

E.

Effet de l'opérateur φ, 114.
Égalité des nombres complexes, 4.
— des tétraèdres, 11.
— des formes F_1, 12.
— des vecteurs, 17.
— des bipoints, 22.
— des formes F_2, 22.
— des formes F_3, 24.
Égalité des tripoints, 24.
Élasticité, 167 et suiv.
Éléments (*cf.* quaternions, introd., *cf.* aussi Hamilton).
Ellipsoïde du tenseur, 114.
— d'inertie, 160.
— central, 160.
— de Poinsot, 162.

Ellipsoïde des forces vives, 162.
— des tensions, 168.
— des dilatations, 172.
Émanence planaire, 47.
— spatiale, 47.
Entraînement (Mouvement d'), 81.
Équation (A) d'Hamilton, 52, 61.
Équations entre les vecteurs i, j, k, 52.
— du produit quaternionien, 52.
— du scalar et du vecteur d'un produit, 52.
— de Frenet, 84.
— d'un trièdre caractéristique, 88.
— (L) et (M), 88.
— d'inversion (H), 106.
— cubique fondamentale (G), 106.
— vectorielle du 1er degré, 107.
— scalar du 2e degré, 111.
— d'une quadrique, 111.
— (Forme cyclique), 116.
— d'Euler (Mouv.), 161.
— d'Euler (Fluides), 183.
— de continuité, 183.
— de Maxwell, 186.
Equation vectorielle de la droite, 20.
— vectorielle du plan, 20.
— barycentrique de la droite, 15.
— barycentrique du plan, 15.
— scalar du plan, 73.
Équilibre intérieur d'un corps isotrope, 176.
— du parallélépipède élémentaire, 185.
— de torsion, 181.
— d'une couche sphérique, 179.
— d'une couche cylindrique, 181.
— du tétraèdre élémentaire, 169.
Espace comme domaine du 3e degré, 38.
— comme domaine du 4e degré, 31.
— (Fonctions d'), 119.
— cyclique, 142.
— acyclique, 142, 145.
Euler (Droites d'), 25, (25).
— (Angles d'), 79.
— (Paramètres d'), 79.
— (Équations d') (*cf.* Équations).
Exponentielle (Notation), 57.
Extension longitudinale d'un prisme, 178.

F.

Facteur moyen (Règle du), 41.
Faisceaux de droites et de plans, 45, 47.
Fehr (Préface), 85.
Feuillet, 159.
Fluides (Équilibre des), 182.
— (Mouvement des), 182 et suiv.
Fluide hypothétique, 132, 138.
Flux, 138-147.
— (Variation du), 149.
Fonction linéaire, 97 (*cf.* Linéaire).
— d'espace, 119.
— harmonique, 150, 192,
— régulière, 150.
Föppl, 148, 159.
Forces (Introd.), 48 et suiv.
— (Tube de), 138.
— (Lignes de), 138.
Force vive, 162.
Formes F_1, 12.
Formes F_2, 22.
— F_3, 24.
— F_4, 25.
— F_1 de masse non nulle, 13 et suiv.
— F_1 de masse nulle, 17 et suiv.
— F_2 (Réduction de la), 23, 49.
— (Multiplication alternée des), 40.
Formules générales du calcul, 62 et suiv.
— fondamentales i, j, k, 52.
— fondamentales trois vecteurs, 63.
— fondamentales double produit, 64.
— contragradientes, 96.
— de Green, 150-151.
— de Laplace, 155.
— de Poisson, 146, 156.
— (*cf.* aussi Équations).
Frenet, 84.
Fresnel, 192.

G.

Gauss, 139, 159.
— (Intégrale de), 159.
Géodésiques (Lignes), 91.
Gerbes de droites de plans, 47.
Gibbs (Préface), 98.
Glissements élémentaires, 172.
Gradient, 121.
— (Définition absolue du), 131.

Gradient (Interprétation du), 132.
— (Théorème du), 140.
Grandeurs (Dépendance numérique), 2.
— congruentes, 2.
— (Degré des), 3.
— du 1er degré, 3.
— (Addition, soustraction des), 3.
Grandeurs (Multiplication ou division par un scalar), 4.
— (Multiplication générale des), 6.
— (Complément d'une), 28.
— incidentes ou unies, 36.
— simples, 41.
Grassmann (Introd.), 8, 22, 29, etc.
Guiot, 74, 153.

H.

Hadamard, 155 (Note).
Halphen, 78.
Hamilton, 1, 17, 21, etc.
— (Équation cubique G d'), 106.
— (Équation H d'), 106.
— (Équation d'), 166.
— (Théorème d'), 77.
— Équation A d'), 52, 61.
Harmonique (Fonction), 150, 192.
Hélicoïdal (Déplacement), 76, 85.
Helmholtz, 183.
Hodographe, 82.
Homofocales (Quadriques), 115.
Homologues (Dyadiques), 102.
Homothétiques (Quadriques), 113.
Humbert, 135 (Note).

I.

Idemfacteur, 110.
Identité de deux domaines, 5.
Ignatowski, 131, 132.
Imaginaires, 1.
Incidentes (Grandeurs), 35.
Incompressibilité (Condition d'), 147.
Incompressibles (Fluides), 183.
Index d'un bivecteur, 39.
Indice de réfraction, 195.
Induction magnétique, 186.
Inertie (Moments d'), 160.
— (Ellipsoïde d'), 160.
— (Axes principaux d'), 160.
Instantané (Mouv.) d'un solide, 80.
Intégrale courbe, 124.
Intégrale multiple, 135.
— vectorielles et scalaires, 137.
Intégration, 124.
Intensité du champ, 186.
Interprétation de ∇, div., rot., 132.
Invariant du produit [*ss*], 49.
— de la dyadique, 99.
— de la transformation linéaire, 105.
Inverse de la dyadique, 100-101.
— (Quaternion) (*cf.* Réciproque).
Inversion de la fonction φ, 106.
Isotrope (Corps), 174, 189.
— (Équil. et mouv int.), 176, 189.
Isotropie (Constantes d'), 174.

J.

Jahnke, 25 (19 et suiv.), 51.
Jaumann, 98, 99, 165, 153.
Joly (Jaspar). Introd.

K.

Kraft (Introd.), 47.

L.

L (Formules), 88.
Lamé (Paramètres de), 174.
Lagrange, 164.
Lamellaire (Champ), 145.
Laplace, 155, 156.
Laplacien, 130.
Ligne droite (Équation de la), 15, 73.
Lignes asymptotiques, 90.
— de courbure, 89.
— géodésiques, 91, 96.

Lignes de forces, 138.
Linéaire (Fonction), 97 et suiv.
— (Fonction) autoconjuguée (*cf.* Tenseur).
Linéaire Transformation), 104.
— (Divergence et curl de la fonction), 134, (VII).
Longueur d'onde, 190.

M.

(M) Formules, 88.
Maclaurin (Configuration de), 46.
Marcolongo, 155 (Note), 159 (Rem.).
Masse d'une forme F_1, 12.
Maxwell, 21, 186 et suiv.
Menelaüs (Théorème de), 25, (11).
Meusnier (Théorème de), 88.
Milieu isotrope, 189.
Module d'un vecteur, 17.
— de compression, 177.
— du quaternion, 56.
Moivre (Formule de), 57.
Moment d'un couple, 48.
— d'une force, 48.
— réciproque de deux droites, 49.
— résultant, 50.
— d'inertie, 160.
Mouvement absolu, 81.
— relatif, 81.
— d'entraînement, 81.
— instantané d'un solide, 80.
— d'un solide (Géométrie du), 165.
Mouvement autour d'un point fixe, 161, 165.
— central d'un point, 82.
— d'une figure plane dans son plan, 94.
— d'un point à la surface de la Terre, 164.
— intérieur d'un corps isotrope, 176.
— intérieur dans un milieu isotrope, 189.
— des fluides, 182.
— stationnaire, 184.
Moyen (Règle du facteur), 41, 55.
Multiplication des grandeurs complexes, 6.
— par un scalar, 4.
— d'un vecteur par un scalar, 18.
— alternée, 27.
— dans le domaine du 4e degré, 31 et suiv
— dans le domaine du 3e degré, 38 et suiv.
— alternée des formes, 40.
— générale, 6,
— dyadique, 98.
— quaternionienne, 52.
— scalaire (*cf.* Produit scalaire).
— vectorielle (*cf.* Produit vectoriel).

N.

Nabla (Introd.), 119 et suiv.
— considéré comme vecteur, 126, 133.
— (Définition absolue du), 131.
— (Interprétation du), 132.
Neumann, 192.
Newton, 72, 155, 157.
— (Théorème de), 51, (4).
Newtoniens (Potentiels), 155.
Nombres complexes, 1.
— (Égalité des), 4.
Normal (Plan), 83.
— principale, 84.
Nonion (Forme), 99.
Notation exponentielle, 57.
Nutation, 165.

O.

Olinde Rodrigues (Paramètres d'), 79.
Ondes planes, 189, 190.
— transversales, 188, 191.
— de distorsion, 189, 191.
— de condensation, 189, 191.
— (Longueur d'), 190.
— (Vitesse d'), 190.
Opérateur d'Hamilton (Nabla), 119 et suivantes.
— de rotation conique, 57.
Osculateur (Plan), 88.
— (Cercle), 83.
Osculatrice (Sphère), 83.
Ossian Bonnet (Théorème d'), 88, 96.
Ostrogradsky (Formule d'), 139.

P.

Parallélépipède élémentaire, 185.
Parallélogramme (Règle du), 19.
Parallèles (Facteurs), 37.
Paramètres d'Euler, 79.
— d'Olinde Rodrigues, 79.
— quaternioniens, 79.
— de Lamé, 174.
— de réduction K, 49.
Pascal (Théorème de), 45.
Peano, 9, 22.
Période, 190, 192.
Permanent (Régime), 138.
Perméabilité magnétique, 186.
Perpendiculaire à la droite, 73.
— au plan, 73.
— commune, 73.
Perspectivité, 45 et suiv.
Phase, 192.
Plan polaire, 75.
— (Équation vectorielle du), 20.
— à l'infini, 26.
— du quaternion, 56.
— (Équation scalaire du), 73.
— (Coordonnées du), 74.
— nul, 51.
— tangent quadrique, 112.
— diamétral, 112.
— cyclique, 116.
— osculateur, 83.
— normal, 83.
— rectifiant, 85.
— radical, 75.
Point (Introd.), 9 et suiv.
— multiple, 12-25, (1).
— à l'infini, 26.
— nul, 51.
Poisson, 80, 146, 156.
Poinsot, 48, 162, 165.
Polarisation diélectrique, 186.
Polaire, 75.
Pôle, 75.
Poncelet (Théorème de), 25, (7).
Ponctuelle, 45, 47.
Position d'une droite, 26.
Postfacteur (Dyadique comme), 185 (Note).
Potentiel, 145, 146, 148, 155.
Potentiel (Champ), 145.
— vectoriel, 148.
— newtonien, 155.
— de volume, 155.
— de surface, 158
— de double couche, 159.
— de vitesses, 183.
Précession, 165.
Préfacteur (Dyadique comme), 185 (Note).
Pression, 167, 182.
Principe du calcul des quaternions, 7.
— de l'Ausdehnungslehre, 8.
Produit général de deux grandeurs, 6.
— (Commutativité du), 44.
— des formes, 26 et suiv.
— extérieurs, 27, 31.
— de points, 31.
— intérieur ou scalaire, 30.
— vectoriel, 39, 54.
— progressif, 29.
— régressif, 29, 35.
— relatif, 29, 36.
— dyadique, 98.
— planimétrique, 29, 36, 41, 44, 45.
— des trois côtés d'un triangle, 41.
— de trois droites concourantes, 41.
— stéréométrique, 29, 36, 37, 41, 44, 47.
— de 2 tripoints, 41.
— de 3 plans, 41.
— de 4 plans, 41.
— dans l'espace, 44, 47.
— extérieur, 27.
— extérieur de points, 31.
— d'un point et d'un vecteur, 37.
— de 2 vecteurs, 38.
— intérieur de 2 vecteurs, 38.
— quaternion de 2 vecteurs, 52.
— quaternions de 3 vecteurs, 62 et suiv.
— (Double), 41, (XIV).
— (Double) (quaternion), 64.
Produit relatif, 29, 36.
— de dyadiques, 101.
Projectivité, 45.
Propagations par ondes planes, 188.
Puissance d'un feuillet, 159.
— d'un point, 75.
Puiseux, 95.

Q.

Quadriques, 111.
— homothétiques, 113.
— homofocale, 115.
Quantités scalaires, vectorielles (*cf.* Introd.).
Quantités dirigées. (Introd.).
— numériquement dépendantes, 2.
Quaternion, 52 et suiv.
Quaternion comme somme, 52.
— comme produit, 56.
— unitaire, 56.
— conjugué, 58.
— réciproque ou inverse, 59.
Quaternions (Principe du calcul des), 7.
Quaternioniens (Paramètres), 79.
Quotient de 2 vecteurs, 55.

R.

Radical (Plan), 75.
Rapport de deux spaths, 11,
— anharmonique, 25, (12).
Rayon de courbure, 83.
— de torsion, 83.
— ordinaire, 195.
— extraordinaire, 195.
Réciproque d'un vecteur, 55.
— (Quaternion), 59.
— (Système), 66.
— d'un produit, 60.
— (Transformation par rayons vec.), 75
Rectifiant (Plan), 85.
Rectifiante (Droite), 85.
Réduction des F_2, 23, 49.
Réfraction (Double), 193, 195.
Régulière (Fonction), 150.
Régressif (*cf.* Produit).
Relatif (Mouvement), 81.
— (Vitesse, accélération), 81, 165.
— Produit (*cf.* Produit).
Relation numérique, 1.
Représentation géométrique du quaternion, 60.
Résolution de l'équation vectorielle du 1er degré, 107.
Retournements concourants, 76.
— non concourants, 76.
Riemann, 143.
Rotation instantanée, 48, 80, 165.
— conique, 57.
— finie autour d'un point fixe, 79.
Rationnel, 126 (*cf.* Curl).
Rotor (*cf.* Curl).

S.

Sarrau, 17, 167, 174.
Scalar (Introd.)
— du produit de 2 vecteurs, 52, 53.
Scalaire (*cf.* Produit).
Sections circulaires quadriques, 116.
— principales d'un cristal, 193.
Solénoïdal (Vecteur), 189.
Somme de grandeurs (*cf.* Addition).
— de points, 13 et suiv.
— de vecteurs, 19.
— de bipoints (*cf.* Réduction des F_2).
— de tripoints, 24.
— de tétraèdres, 25.
— (Différentielle d'une), 70.
Somme géométrique, 19.
Sources, 132.
Soustraction des nombres complexes, 3.
Spath, 10 et suiv.
Sphère, 75.
— osculatrice, 83.
Sphérique (Addition), 60.
— (Équilibre d'une couche), 179.
Stationnaire (Mouvement), 184.
Statique, 48 et suiv.
Steiner, 160.
Stokes, 143, 189.
Surfaces, 86.
— développables, 86, 95.

Surfaces de 2e ordre, 111.
— homofocales, 115.
— de niveau, 122.
— homothétiques, 113.
Surfaces réglées du 2e ordre, 47.
Symbole ∇ appliqué à un scalar, 121.
— appliqué à un vecteur, 126.
Symbolique (∇ comme vecteur), 126, 133.

T.

Tait (Introduction), 133, 166.
Tangente, 83, 84.
Tannenberg (de), 93.
Teneur, 10.
— du quaternion, 56.
Tenseur, 104 et suiv., 168, 182.
— (Forme normale du), 108, 109.
Tension élémentaire, 167.
— en un point, 167.
— tangentielle, 168.
Tensions (Ellipsoïde des), 169.
— normales, 169.
— principales, 169.
— sur un plan, 175.
Tétraèdre, 10 et suiv.
— (Équilibre du), 169.
Théorème des aires, 82.
— de Meusnier, 88.
— d'Ossian Bonnet, 88.
— de la divergence, 139.
— du gradient, 140.
— du Curl, 141.
— d'Helmholtz, 183.
— de Bernoulli, 184.
Théorème d'Hamilton (Axes coniques),
— de Stokes, 143.
— de Cauchy (Elast.), 169, 182.
— d'Halphen, 78.
Toupie, 163.
Tourbillon, 132, 147 (*cf.* Curl).
Tourbillonnement, 132.
Torsion (Angle de), 83.
— (Rayon de), 83.
— d'un cylindre, 181.
Transformation linéaire, 103.
— autoconjuguée, 104 (*cf.* Tenseur).
— antisymétrique, 104.
Transformée par rayons vecteurs récip., 75.
Translation, 48, 165.
Trièdre i, j, k, 21.
— normal en un point d'une courbe, 84.
— Caractéristique, 88.
Trigonométrie sphérique (Formules de), 72.
Tripoint, 24.
Trivecteur, 39 (Note).
Tube de forces, 138.

U.

Unies (Grandeurs), 36 (Note).
Unités primitives, 2.
— absolue, 2.
— relatives, 2.
Unités (Système d'), 2.
— dans le domaine du 4e degré, 36.
— dans le domaine du 3e degré, 38.

V.

Variation de la circulation, 149.
— du flux, 149.
— locale d'un vecteur, 129.
— totale, 129.
— d'un segment mobile, 93.
Vecteur (Introd.), 10, 17.
— unité, 17.
Vecteur (Module du), 17.
— multiplication par un scalar, 18.
— Addition, 19.
— localisé, 22.
— conjugué, 58.
— parallèles, 18.
— du quaternion, 52, 54.

Vecteur d'espace, 119 et suiv.
— Décomposition en 3 directions, 21, 66.
— Décomposition en 2 directions, 67.
— symbolique ∇, 126, 133.
— de proximité, 112, 113.
— (Produit de deux), 52.
— d'un produit, 52, 54.
Vectorielle (Fonction) (*cf.* Linéaire).
— (Équation) de la droite et du plan, 20, 73.
Véronnet, 153.
Verseur, 56, 108.
Vibration, 190.
— harmonique, 192.
— électrique, 192, 193.
— magnétique, 192, 193.
Vitesse de propagation de l'onde, 190, 191.
— de translation, 48.
— relative-absolue, 81.
— (Formule fondamentale), 80, 165.
— (Curl de la), 132.
— angulaire, 48.
Vis, 49 (Note).

UNIVERSITAS SCIENTIAE OTTAVIENSIS

59998-20 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS et Cie, quai des Grands-Augustins, 55.

LA BIBLIOTHÈQUE
Faculté des Sciences
UNIVERSITÉ D'OTTAWA
Echéance

Celui qui rapporte un volume après la dernière date timbrée ci-dessous devra payer une amende de cinq sous, plus un sou pour chaque jour de retard.

THE LIBRARY
Faculty of Science
UNIVERSITY of OTTAWA
Date due

For failure to return a book on or before the last date stamped below there will be a fine of five cents, and an extra charge of one cent for each additional day.

CE

a39003 006801244b

U D / OF OTTAWA
COLL ROW MODULE SHELF BOX POS C
333 14 05 06 06 09 0